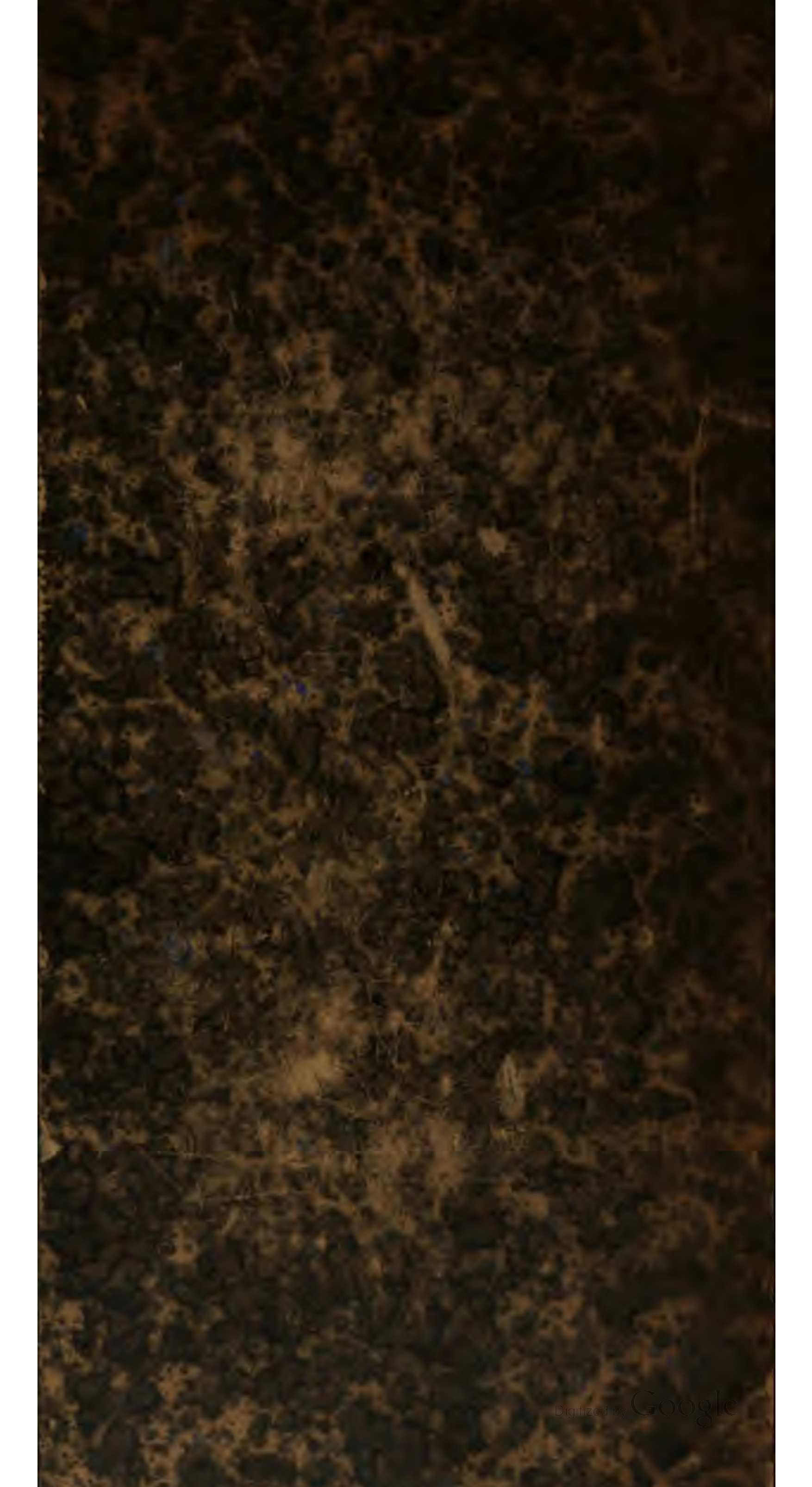
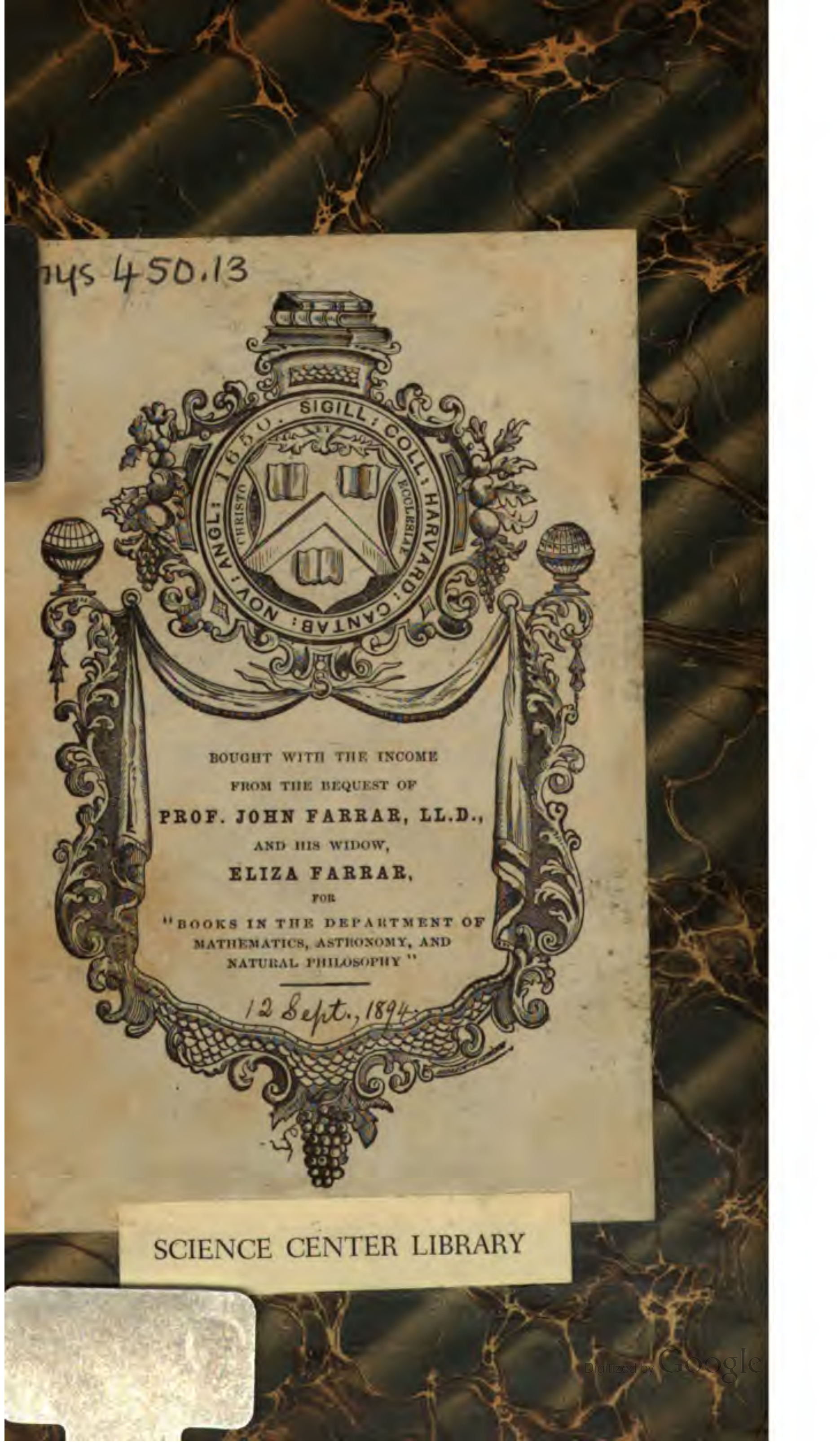



SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO
ECCLESIAE



EXERCICES

DE PHYSIQUE

ET

APPLICATIONS.

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR :

Cours de manipulations de Physique. Un beau volume in-8°, avec 166 figures dans le texte.

Études sur les moteurs à gaz tonnant. In-8°, avec figures dans le texte et planches; 1884.

Essai sur l'effet thermique des parois d'une enceinte sur les gaz qu'elle renferme (Thèse inaugurale). In-4°, avec 3 planches; 1878.

L'ÉCOLE PRATIQUE DE PHYSIQUE.

EXERCICES
DE PHYSIQUE
ET
APPLICATIONS

PRÉPARATOIRES A LA LICENCE;

PAR

M. AIMÉ WITZ,
Docteur ès sciences,
Ingénieur des Arts et Manufactures,
Professeur aux Facultés catholiques de Lille.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1889

PRÉFACE.

Le titre de ce Livre dit si clairement ce qu'il est, que je pourrais me dispenser de l'expliquer dans une Préface. C'est un Recueil de problèmes nombreux et variés, qui sont traités, soit comme exercices, pour élucider les principes, soit comme applications, pour acquérir l'usage des formules. Je me suis proposé, en l'écrivant, un double objectif, didactique et pratique : dans ma pensée, il convient non seulement à ceux qui appliquent la Physique pour mieux l'apprendre, mais encore à ceux qui cherchent à bien la savoir pour mieux l'appliquer.

Tous mes Collègues de l'enseignement supérieur sont d'accord pour déclarer qu'on ne possède une théorie qu'après en avoir déduit toutes les conséquences : les exercices sont donc le meilleur moyen de former des élèves et de les juger. Voilà pourquoi la Faculté des Sciences de Paris propose, depuis plusieurs années, des problèmes à ses candidats à la licence : cette nouvelle manière de faire se recommande suffisamment de l'autorité et de la compétence des Maîtres éminents qui l'ont inaugurée, et elle sera bientôt adoptée partout. C'est dans le but de préparer nos élèves à cette épreuve que nous avons formé ce Recueil ; on y trouvera un grand choix de questions à résoudre et en particulier tous les sujets de composition donnés à la Sorbonne.

Ce Livre complète notre *Cours de manipulations*, avec

lequel il forme un tout auquel convient bien le titre commun d'*École pratique de Physique*, qui a été donné à ces deux Ouvrages.

Mais les théories de la haute Physique ont pris dans ces derniers temps une place considérable parmi les connaissances humaines : elles ne sont plus le privilège de quelques esprits distingués, voués à l'étude spéculative des principes et des causes, mais la Thermodynamique et l'Électricité sont étudiées pour elles-mêmes, pour les lois qu'elles ont formulées et les phénomènes qu'elles expliquent. On ne les enseigne plus seulement dans les Facultés, mais elles ont été introduites dans les programmes de toutes nos bonnes écoles techniques, dans lesquelles on forme des ingénieurs de toute marque, dont la science est plus large et souvent aussi profonde que celle du licencié. Ingénieur lui-même, l'Auteur ne pouvait faire abstraction de cette catégorie de physiciens, et il ne les a pas oubliés en composant son Livre, qui sera pour eux un *Compendium de Physique* par demandes et réponses. Il serait flatté de le voir apprécié par eux.

Rien n'a été négligé pour rendre l'Ouvrage utile à tous ceux auxquels il s'adresse : à cet effet il fallait par-dessus tout suivre un plan simple et méthodique. Tous les Chapitres sont rédigés de même : les théories sont d'abord rappelées brièvement et les formules rapprochées et numérotées, de manière à en faciliter l'intelligence et l'usage ; puis des tableaux synoptiques réunissent toutes les constantes numériques qu'il est nécessaire de connaître ; viennent ensuite les applications. Le Livre se suffit donc à lui-même.

Nous y avons adjoint un *memento* des formules usuelles, qu'un physicien ne doit jamais oublier, et nous avons formé

un supplément de barèmes et de calculs faits, qui abrègent singulièrement les calculs.

Ce travail est le premier de ce genre : nous n'avons donc pu imiter ni copier aucun devancier. Mais nous reconnaissons avec empressement les nombreux emprunts que nous avons faits aux livres, aux publications et aux travaux des physiciens français et étrangers; nous avons cité le plus souvent les noms de ceux auxquels nous devions une solution élégante et originale; si quelqu'un d'eux a été oublié, nous le prions de nous le pardonner.

Les plus grands efforts ont été faits pour éviter toutes les incorrections théoriques et typographiques; mais nous n'avons pas la prétention de croire qu'il ne se soit pas glissé de solutions inexactes dans un Recueil de 500 problèmes pris sur les questions les plus délicates de la Physique. Que le lecteur relève ces erreurs avec indulgence, par égard pour la nouveauté et les difficultés de l'entreprise et pour le travail qu'elle a coûté.

AIMÉ WITZ.



TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE I.

Physique mécanique.

LIVRE II.

Chaleur.

LIVRE III.

Électricité et magnétisme.

LIVRE IV.

Lumière et son.

CONSTANTES NUMÉRIQUES.

Formules usuelles.

Tables numériques.

ERRATA.

Page 207, 5e ligne, *au lieu de* $\left(+\frac{3}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, *lisez* $\left(+\frac{3}{3}\right)^{3}$.

Page 248, 15e ligne, *au lieu de* $W = \Phi Q$, *lisez* $W = -\Phi Q$.

Page 249, dernière ligne, *au lieu de* $\mu = \frac{I}{H}$, *lisez* $\mu = \frac{I'}{H}$, *et ajoutez ces mots :* I′ est l'induction magnétique, c'est-à-dire le flux qui traverse une surface égale à l'unité, placée à l'intérieur du corps, perpendiculairement à l'aimantation.

Page 289, dernière ligne, *au lieu de* $\frac{168}{20} = 8{,}4$, *lisez* $\frac{160{,}8}{20} = 8{,}04$.

Page 358, 15e ligne, *au lieu de* sous, *lisez* sur.

Page 360, 10e ligne, *au lieu de* distance d des pôles du solénoïde, *lisez* distance r du solénoïde.



EXERCICES
DE PHYSIQUE
ET
APPLICATIONS.

LIVRE I.

PHYSIQUE MÉCANIQUE.

CHAPITRE I.

UNITÉS C. G. S.

L'expression de toute grandeur mesurable se compose de deux éléments :

L'un d'eux est le nom d'une grandeur type bien connue, de même espèce que la grandeur à mesurer : c'est l'unité.

L'autre élément est numérique : c'est le nombre de fois qu'il faut prendre l'unité pour reproduire la quantité considérée.

Ainsi une masse est égale à cinq masses-gramme.

Il faut définir autant d'unités qu'il y a d'espèces différentes de grandeurs à évaluer.

Mais toutes les quantités que l'on considère dans les sciences dynamiques, en général, et dans la Physique, en particulier, peuvent être définies en fonction de trois unités fondamen-

tales de longueur, de masse et de temps. De ces trois unités dérivent toutes les unités auxiliaires qu'on peut avoir à considérer.

Unités fondamentales.

L'unité de *longueur* (L) adoptée est la centième partie du mètre étalon de nos Archives nationales : c'est le centimètre C.

La *masse* du gramme est l'unité de masse (M) ; c'est le millième de la masse du kilogramme étalon de nos Archives nationales. On l'écrit G.

L'unité de *temps* (T) se déduit de la rotation de la Terre autour de son axe, supposée constante. On a pris pour unité la seconde S de temps moyen, soit $\frac{1}{86400}$ du jour solaire moyen.

Ces trois unités sont arbitraires et indépendantes les unes des autres.

Unités dérivées; leurs dimensions.

Toutes les autres unités dérivent des unités précédentes.

Chaque unité dérivée est rattachée aux trois unités fondamentales par une relation simple, qui permet de reconnaître à première vue la puissance à laquelle elles ont été élevées pour former l'unité dérivée. L'exposant de cette puissance s'appelle la *dimension* de l'unité dérivée, relativement aux unités fondamentales. Dans toute équation, résultant d'une recherche expérimentale, les dimensions de chaque terme par rapport aux unités fondamentales doivent être les mêmes. Il résulte de cette observation un précieux moyen de contrôle de l'exactitude d'une équation.

La relation générale qui exprime les dimensions a reçu le nom d'*équation des dimensions*.

Les équations des dimensions permettent de passer d'un système de mesures à un autre dans lequel les unités fondamentales sont différentes. Soit, en effet, une grandeur de dimension 2 en longueur, donc fonction de L^2; supposons que nous cherchions sa valeur numérique dans un système dans lequel l'unité fondamentale de longueur serait *n* fois plus petite; le nombre qui représentera la longueur deviendra *n*

fois plus grand, et l'expression de la grandeur considérée sera n^2 fois plus grande. Par conséquent, en évaluant l'ancienne unité fondamentale en fonction de la nouvelle et en portant cette valeur dans l'équation des dimensions, on aura le coefficient numérique par lequel il faut multiplier l'expression de la grandeur pour passer au nouveau système.

Unités géométriques.

Les *surfaces* se mesurent en fonction du mètre carré, et les volumes en fonction du mètre cube : l'unité de surface a pour dimension L^2, l'unité de volume a pour dimension L^3.

Les angles se mesurent par le quotient $\frac{\text{arc}}{\text{rayon}}$; leur dimension est donc zéro, car on a $\frac{L}{L} = L^0$; la valeur d'un angle est donc indépendante de l'unité de longueur. De fait, l'angle unité est celui dont l'arc est égal au rayon : cet angle, qu'on appelle quelquefois le *radiant,* vaut $\frac{360}{2\pi} = 57^\circ 17' 44''$.

La *courbure* d'une courbe est définie par l'inverse du rayon; sa dimension est $\frac{1}{L}$ ou L^{-1}.

Nous en dirons autant de la courbure moyenne d'une surface, en un point donné, puisqu'on l'obtient en faisant la moyenne arithmétique des courbures de deux sections normales perpendiculaires entre elles (Théorème d'Euler).

Unités mécaniques.

Unité de vitesse, celle d'un mobile qui parcourt d'un mouvement uniforme l'unité de longueur dans l'unité de temps.

$$\text{Dimensions : } v = \frac{L}{T} = LT^{-1}.$$

Unité d'accélération, celle d'un mobile dont la vitesse s'accroît d'une unité dans l'unité de temps.

$$\text{Dimensions : } j = \frac{v}{T} = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}.$$



L'accélération g, due à la pesanteur, est égale à Paris à $980^{cm},96$, soit à 981^{cm}.

Unité de force, celle qui communique à l'unité de masse l'unité d'accélération; elle a pour valeur Mj.

$$\text{Dimensions : } f = Mj = MLT^{-2}.$$

Cette unité s'appelle une *dyne.*

Le poids d'un gramme communique à sa masse, la masse-gramme unité, une accélération égale à g; la dyne lui donne une accélération égale à l'unité : elle est donc 981 fois plus petite.

Une dyne $= \frac{1}{981}$ gramme $= 0^{gr},001019$.

Une mégadyne = 1019 grammes.

Un gramme = 981 dynes.

Un milligramme = 0,981 dyne.

Un kilogramme $= 0,981 \times 10^6$ dyne (1) = 0,981 mégadyne.

Unité de quantité de mouvement, le produit d'une masse égale à l'unité par l'unité de vitesse.

$$\text{Dimensions : } Mv = MLT^{-1}.$$

Unité de travail, le travail accompli par une dyne, déplaçant son point d'application de l'unité de longueur, suivant sa direction.

$$\text{Dimensions : } \mathfrak{T} = FL = ML^2T^{-2}.$$

Cette unité a reçu le nom d'*erg :* c'est une *dyne-centimètre*.

$$\text{Un erg} = \frac{1^{gr}}{981} \times 1^{cm} = \frac{0^{kg},001}{981} 0,01 = \frac{1}{981 \times 10^5} \text{ kilogrammètre.}$$

$$\text{Un kilogrammètre} = 981 . 10^5 \text{ ergs} = 98,1 \text{ mégergs.}$$

Le rapport varie avec le lieu, car le kilogrammètre est variable, la dyne-centimètre invariable.

---

(1) L'emploi courant des nombres très grands et très petits a conduit à la mise en facteur des puissances de 10; l'exposant de la puissance de 10 est facile à déterminer, attendu qu'il est la caractéristique du logarithme du nombre.

L'*énergie cinétique* a la même unité que le travail, car c'est le demi-produit d'une masse par le carré d'une vitesse, ce qui donne ML^2T^{-2}; il n'y a pas à tenir compte du facteur 2, qui ne modifie pas les dimensions.

Un *couple* aurait aussi les mêmes dimensions qu'un travail.

Unité de puissance, la puissance d'un moteur qui développe l'unité de travail dans l'unité de temps.

$$\text{Dimensions : } \mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{T}}{T} = ML^2T^{-3}.$$

Le cheval-vapeur vaut

$$75 \times 981 \times 10^5 \text{ ergs} = 7{,}357 \times 10^9 \text{ ergs}$$

par seconde.

APPLICATIONS.

1. *Une force est égale à* 80 *dynes dans le système* C.G.S; *quelle sera sa valeur numérique dans le système de Gauss, dont les unités fondamentales sont le millimètre, la masse du milligramme et la seconde?*

Évaluons les anciennes unités fondamentales en fonction des nouvelles et portons ces valeurs dans l'équation de dimension de la force, MLT^{-2}.

$$x = \frac{\text{gramme}}{\text{milligr.}} \cdot \frac{\text{centim.}}{\text{millim.}} \cdot 80 = 1000 \times 10 \times 80 = 800\,000.$$

2. *Le horse-power* (HP) *anglais est égal au travail, par seconde, de* 550 *foot-pound; l'exprimer en ergs, en prenant pour le pied* 30,48 *centimètres et pour la livre* 453,59 *grammes.*

$$HP = \frac{453{,}59}{\frac{1}{981}} \times \frac{30{,}48}{1} \times 550 = 7459 \text{ mégergs par seconde.}$$

3. *L'unité de masse de la Mécanique céleste est celle de la masse qui attire un corps placé à l'unité de distance, en lui*

communiquant l'unité d'accélération : quelle est en masse-gramme du système C.G.S. *la valeur de* 40 *unités de ce système ?*

Le rayon moyen R *du sphéroïde terrestre est de* $6{,}3709.10^8$ *centimètres ; la densité d de la Terre est égale à* 5,56.

Nous avons

$$\frac{\frac{m}{1}}{\frac{M}{R^2}} = \frac{1}{981},$$

en appelant M la masse de la Terre et m celle de l'unité cherchée ; on en déduit

$$m = \frac{M}{R^2}\frac{1}{981} = \frac{4}{3}\pi\frac{Rd}{981} = 15{,}125 \times 10^6 \text{ masses-grammes.}$$

$$x = 40 \times 15{,}125 \times 10^6 = 605 \times 10^6 \text{ masses-grammes.}$$

4. *Dans le système ci-dessus, quelle est l'accélération produite par l'attraction d'une masse quelconque à une distance quelconque ? On prendra le centimètre et la seconde pour unités de longueur et de temps.*

Pour une masse m et une distance l, $x = \frac{m}{l^2}$.

5. *On a proposé de prendre pour unités fondamentales la masse* μ *de la molécule de sodium, la longueur* λ, *longueur moyenne des ondes émises dans le vide par le sodium, et le temps* τ, *durée de la période vibratoire des mêmes vibrations.*

On sait que 140 *trillions de molécules d'hydrogène pèsent* 1^{mgr} ; *le sodium a un équivalent égal à* 23. *De plus,*

$$\lambda = 5{,}89387 \times 10^{-5} \text{ centimètres,}$$

$$\tau = 1{,}9614 \times 10^{-15} \text{ secondes.}$$

On demande d'exprimer en dynes la valeur de l'unité de force dans ce système.

Le poids en grammes de la molécule de sodium est

$$\frac{23 \times 10^{-3}}{14 \times 10^{13}} = 1,643 \times 10^{-16},$$

$$f = \mathbf{LMT^{-2}} = 5,89387 \times 10^{-5} \times 1,643 \times 10^{-16}(1,9614 \times 10^{-15})^2$$
$$= 2,5171 \times 10^9 \text{ dynes.}$$

6. *Donner les équations de la masse, du travail et de la puissance motrice dans le système mètre, force du gramme et seconde*

$$\mathbf{M} = \mathbf{L^{-1}FT^2}, \quad \text{car} \quad \mathbf{M} = \frac{\mathbf{F}}{l},$$
$$\mathfrak{E} = \mathbf{LF},$$
$$\mathfrak{P} = \mathbf{LFT^{-1}}.$$

CHAPITRE II.

CALCUL DES ERREURS.

Mesurez dix fois de suite une longueur; si vous cherchez à connaître cette longueur à une fraction de millimètre près, vous trouverez dix valeurs différentes; ces différences tiennent à l'imperfection de nos sens, ou bien à des incorrections accidentelles du mode opératoire, qui produisent des erreurs de pointé et de lecture.

Ces erreurs sont inévitables; leur caractère est d'être fortuites et indépendantes les unes des autres.

Elles ne répondent à aucune loi.

Toutefois, on constate deux faits qui sont le résultat obligé des soins et des précautions dont l'opérateur s'est entouré pour réaliser une mesure parfaite : 1° les valeurs affectées d'une erreur légère sont plus nombreuses que celles qui présentent une erreur grave; 2° si le nombre des mesures est assez considérable, il y a autant de résultats qui pèchent par excès que par défaut : un résultat contraire témoignerait d'une cause d'erreur systématique à chercher dans l'instrument.

Ces deux observations permettent de réduire dans une certaine limite l'influence des erreurs fortuites sur le résultat d'une série d'expériences, car elles se compensent en partie, si l'on en fait la moyenne arithmétique.

Soient, en effet, n mesures ayant donné les valeurs approchées d'une grandeur q, q', q'', ... : soit x sa valeur exacte. Chaque résultat q est entaché d'une erreur $\pm\varepsilon$, positive ou négative ;

$$x = q \pm \varepsilon, \qquad q = x \mp \varepsilon.$$

Faisons la moyenne arithmétique des valeurs q; par com-

pensation, la moyenne $M = \frac{q + q' + q'' + \ldots}{n}$ sera probablement plus voisine de x qu'aucune valeur q obtenue directement ; appelons δ la différence entre M et une observation q :

$$\pm \delta = \pm (q - M).$$

δ est à peu de chose près l'erreur du résultat q. Il faudrait pouvoir faire la moyenne de ces différences δ; mais, leur somme étant identiquement nulle, il a fallu définir autrement leur moyenne. On l'obtiendra en extrayant la racine carrée de la $n^{\text{ième}}$ partie de $\Sigma\delta^2$, somme des carrés des erreurs; e est ce qu'on appelle l'*erreur moyenne* des observations :

$$e = \pm \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n}}.$$

L'erreur E à craindre sur la moyenne M elle-même est la moyenne des erreurs e, soit $\pm \sqrt{\frac{e^2}{n}}$; il vient donc

$$E = \pm \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n^2}}.$$

E est l'*erreur de la moyenne*.

Gauss a appelé *poids de la moyenne* l'inverse du carré de l'erreur de la moyenne :

$$\pi = \frac{n^2}{\Sigma\delta^2}.$$

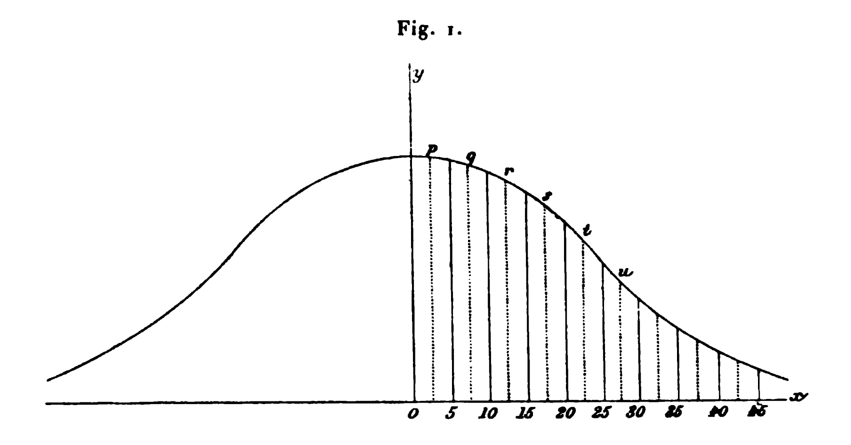
Il est possible de peindre aux yeux, par une construction graphique, la probabilité plus ou moins grande des divers résultats relevés. En effet, dressons un Tableau des différences δ positives et négatives, et supposons qu'il y en ait p comprises entre 0 et 5 unités de l'ordre des grandeurs observées, q entre 5 et 10, r entre 10 et 15, ...Traçons deux axes coordonnés et portons en abscisse les écarts 5, 10, 15, ..., à une échelle quelconque; puis, sur le milieu de chaque intervalle, élevons une ordonnée égale à $p, q, r, s, \ldots$ et joignons les points ainsi obtenus (*fig.* 1).

Même construction du côté des x négatifs. Nous obtenons deux branches généralement symétriques, qui dessinent la courbe des erreurs ; elle est représentée par l'équation

$$y = A e^{-h^2 x^2}.$$

y est la *probabilité* d'une erreur x ; A sera la probabilité d'une erreur nulle ; h a reçu le nom de *module de précision,* car le

Fig. 1.



calcul démontre que ce paramètre mesure la précision d'une série d'observations. Ce module peut se calculer; on a

$$h = \sqrt{\frac{n}{2\Sigma\delta^2}};$$

il caractérise la valeur de la série d'observations effectuées.

La considération du module a un autre avantage, car elle conduit à la connaissance de l'*erreur probable* de la moyenne M ; cette erreur η est égale aux $\frac{2}{3}$ de E ou, plus rigoureusement,

$$\eta = 0,6745 E \text{ (1)}.$$

(1) C'est l'erreur que Cournot avait appelée *médiane ;* ce nom se retrouve quelquefois.

La connaissance de l'erreur probable est importante pour indiquer le nombre de décimales à conserver dans la moyenne des observations ; le dernier chiffre peut être incertain, jamais l'avant-dernier.

On peut toujours déclarer qu'un écart sextuple de η est absolument improbable.

Nous n'avons étudié jusqu'ici qu'un seul cas, le plus simple de tous, celui où les opérations conduisent directement à la mesure de la quantité dont on veut évaluer la grandeur : le plus souvent l'observation ne donne pas cette quantité, mais une fonction de cette quantité. Voici un exemple de ce cas : un vase a une capacité a à zéro, quelle est sa capacité y à x degrés ? On essaye de lier x à y par la relation

$$y = a + bx,$$

dans laquelle la constante a et le paramètre b nous sont inconnus : a et b se détermineront par deux observations, qui donneront

$$y' = a + bx', \qquad y'' = a + bx'',$$
$$a = \frac{x'y'' - x''y'}{x' - x''}, \qquad b = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Or les valeurs calculées de a et de b ne seront pas exactes, attendu que x', x'', y' et y'' sont entachés des erreurs inévitables de toute observation : il faudrait pouvoir trouver les valeurs les plus probables de a et de b.

Legendre a donné la solution de ce problème : les valeurs les plus approchées des inconnues sont celles qui rendent minimum la somme des carrés des erreurs.

Il faut pour cela que

$$\Sigma x^2 a + \Sigma x\, b = \Sigma xy,$$
$$\Sigma x\, a + nb = \Sigma y,$$

d'où

$$a = \frac{\Sigma x \Sigma y - \Sigma xy}{(\Sigma x)^2 - n\Sigma x^2}, \qquad b = \frac{\Sigma x \Sigma xy - \Sigma y \Sigma x^2}{(\Sigma x)^2 - n\Sigma x^2};$$

on fera donc n observations et l'on évaluera séparément Σx,

Σy, Σx^2 et Σxy ; ce calcul peut être assez pénible, mais l'application ne présente aucune difficulté, une fois que les coefficients sommatoires sont connus, tant que l'on a des équations linéaires; lorsque les équations sont d'un degré supérieur, l'application de cette méthode, dite des *moindres carrés*, conduit à des difficultés inextricables.

APPLICATIONS.

1. *Cavendish a déterminé la densité de la Terre par* 29 *expériences, donnant pour valeur moyenne le nombre* 5,48 : *calculer l'erreur moyenne des observations, l'erreur de la moyenne, son poids, son erreur probable et enfin le module de précision de ces remarquables expériences.*

Résultats.	δ.	Résultats.	δ.
5,50.....	+0,02	5,34.....	−0,14
5,61.....	+0,13	5,79.....	+0,31
5,88.....	+0,40	5,10.....	−0,38
5,07.....	−0,41	5,27.....	−0,21
5,26.....	−0,22	5,39.....	−0,09
5,55.....	+0,07	5,42.....	−0,06
5,36.....	−0,12	5,47.....	−0,01
5,29.....	−0,19	5,63.....	+0,15
5,58.....	+0,10	5,34.....	−0,14
5,65.....	+0,17	5,46.....	−0,02
5,57.....	+0,09	5,30.....	−0,18
5,53.....	+0,05	5,75.....	+0,27
5,62.....	+0,14	5,68.....	+0,20
5,29.....	−0,19	5,85.....	+0,37
5,44.....	−0,04		

Il y a 14 différences positives et 15 différences négatives.

Moyenne 5,48
$\Sigma\delta^2$ 1,1967

$$e = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n}} = \pm\, 0{,}203,$$

$$\mathrm{E} = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n^2}} = \pm\, 0{,}038,$$

$$\pi = \frac{n^2}{\Sigma\delta^2} = 702,$$

$$\eta = 0{,}6745\,\mathrm{E} = \pm\, 0{,}026,$$

$$h = \sqrt{\frac{n}{2\Sigma\delta^2}} = 12{,}1.$$

On peut déclarer qu'une erreur sextuple de η, c'est-à-dire supérieure à 0,15, est absolument improbable.

M. Baily a trouvé 5,67 comme moyenne de 2000 expériences; MM. Cornu et Baille ont, depuis lors, été conduits au nombre 5,56, et ce chiffre paraît le plus probable; ce dernier travail confirme dans une certaine mesure le résultat de Cavendish.

2. *M. Cornu a repris, avec de grands perfectionnements, la mesure de la vitesse de la lumière, par la méthode de M. Fizeau : il a fait* 504 *déterminations, comprises entre* 4 *et* 22 *extinctions. Pour n extinctions, il passe* $2n-1$ *dents de la roue en mouvement;* N *étant le nombre d'observations, le poids de chaque groupe peut être représenté par* $\mathrm{N}(2n-1)$. *Calculer la moyenne de toutes les valeurs relevées, en ayant égard au poids de chaque groupe.*

n	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	21	
N	15	33	20	10	7	94
	69	72	3	4	9	65
	4	22	35	6	36	
$\mathrm{N}(2n-1)$	15 × 7	33 × 9	20 × 11	10 × 13	7 × 15	94 × 17
	69 × 19	72 × 21	3 × 23	4 × 25	9 × 27	65 × 29
	4 × 31	22 × 33	35 × 35	6 × 37	36 × 41	
Vitesses v observées en kilomètres	300 130	300 530	300 750	300 820	299 940	300 550
	300 640	300 350	300 500	300 340	300 350	300 290
	300 620	300 000	300 150	299 550	300 060	

$$\mathrm{V} = \frac{\Sigma \mathrm{N}(2n-1)v}{\Sigma \mathrm{N}(2n-1)} = 300\,330.$$

3. *On a relevé les coordonnées x et y de* 10 *points qui doivent être en ligne droite ; trouver l'équation de cette droite, $y = ax + b$ par la méthode des moindres carrés.*

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	3,5	3,0	2,9	2,6	2,2	1,9	1,4	1,0	0,6	0,3

$$\Sigma x = 45,$$
$$\Sigma y = 19,4,$$
$$\Sigma xy = 57,8,$$
$$\Sigma x^2 = 285;$$
$$285a + 45b = 57,8,$$
$$45a + 10b = 19,4;$$
$$a = -0,35, \qquad b = 3,54,$$
$$y = ax + b = -0,35x + 3,54.$$

4. *Un fil métallique, parfaitement rectiligne, a* $100^{cm},850$ *de longueur à* 15° : *sa section* S *est de* $0^{cq},0011$; *trois observations, faites au cathétomètre, sous des charges croissantes, ont donné les résultats qui suivent, à même température :*

Charge P.	Longueur L.	Allongement l.
kg	cm	cm
0,520	100,99	0,140
1,060	101,148	0,298
1,530	101,291	0,441

On demande de calculer le module d'élasticité ε *de ce fil par kilogramme de charge et par centimètre carré de section.*

$$\varepsilon = \frac{L}{l}\frac{P}{S}.$$

Posons

$$l = a + bP$$

et déterminons a et b par la méthode des moindres carrés :

$$\Sigma l = 0,879,$$
$$\Sigma P = 3,110,$$

$$(\Sigma P)^2 = 9,670,$$
$$\Sigma P^2 = 3,735,$$
$$\Sigma P l = 1,064,$$
$$a = -0,017,$$
$$b = +0,297,$$
$$l = -0,017 + 0,297 P.$$

P.	l observé.	l calculé.
kg	cm	cm
0,520	0,140	0,137
1,060	0,298	0,298
1,530	0,441	0,437

$$\varepsilon = \frac{L}{S} \frac{P}{a + bP} = \frac{100,850}{0,0011} \frac{1,060}{0,298} = 326\,116.$$

CHAPITRE III.

MOUVEMENT, FORCE ET ÉNERGIE.

Soit $s = f(t)$ la loi d'un mouvement quelconque; la *vitesse* v au temps t est égale à $\frac{ds}{dt}$ et l'*accélération*

$$(1) \qquad j = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Dans un mouvement circulaire, la *vitesse angulaire* ω d'un point, parcourant une circonférence de rayon R, est représentée par $\frac{v}{R}$ (1) : dans ce mouvement, l'accélération n'a plus la direction du mouvement, et il y a lieu de déterminer sa direction en même temps que sa grandeur. A cet effet, on considère deux composantes de l'accélération : l'accélération tangentielle $j' = \frac{dv}{dt}$ et l'accélération normale ou centripète, $j'' = \frac{v^2}{R}$. Si le mouvement était uniforme et de période T, on aurait évidemment

$$(2) \qquad j' = 0 \quad \text{et} \quad j'' = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

On compose les vitesses par la règle du parallélogramme ;

(1) La vitesse angulaire est homogène à l'inverse d'un temps ; ses dimensions sont $\frac{1}{T}$. L'unité C.G.S. de vitesse angulaire est le *radiant* par seconde, soit $\frac{360}{2\pi} = 57°17'44''$; un corps de vitesse angulaire égale à l'unité fait donc un tour en 2π secondes.

en portant les vitesses composantes à la suite l'une de l'autre, en grandeur et en direction, on fait leur somme géométrique; cette somme géométrique est la vitesse du mouvement résultant.

Les forces, qui sont des causes de mouvement, se composent de même, par leur somme géométrique. Lorsque trois forces concourantes se font équilibre, on a

$$(3) \qquad \frac{F}{\sin F'F''} = \frac{F'}{\sin FF''} = \frac{F''}{\sin FF'}.$$

On peut calculer la résultante R d'un nombre quelconque de forces F appliquées en un même point; en effet, appelons X, Y et Z leurs projections sur trois axes coordonnés rectangulaires ; nous pourrons écrire

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}.$$

La condition d'équilibre sera

$$(4) \qquad \Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma Z = 0.$$

Le moment de la résultante, par rapport à un point, est égal à la somme des moments de ses composantes, par rapport au même point.

La résultante d'un système de forces parallèles est égale à leur somme algébrique ; la position du point d'application de cette résultante ne dépend que de la position des points d'application des composantes et de leur grandeur relative ; elle est indépendante de la direction du système de forces. Ce point se nomme le *centre des forces parallèles ;* c'est le *centre de gravité*, quand on considère les forces parallèles de la pesanteur agissant sur les molécules d'un corps. Soient x, y, z; x', y', z'; ... les coordonnées des points d'application des forces; x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point d'application de la résultante; on a les relations

$$R = \Sigma F,$$

$$(5) \qquad Rx_1 = \Sigma Fx, \qquad Ry_1 = \Sigma Fy, \qquad Rz_1 = \Sigma Fz.$$

Une force constante en grandeur et en direction produit

une accélération constante ; les formules générales du mouvement uniformément varié, ainsi obtenu, sont

(6) $$v = v_0 + jt, \qquad e = e_0 + \tfrac{1}{2}jt^2.$$

On vérifie l'exactitude de ces formules dans la chute des corps : on en déduit $v = \sqrt{2ge}$, en désignant par g l'accélération de la pesanteur.

La valeur de g varie d'un point à un autre ; on la détermine par la mesure de la longueur l du pendule qui bat la seconde :

$$g = \pi^2 l.$$

Cette valeur est donnée, en unités C.G.S, par la formule suivante, dans laquelle λ désigne la latitude et h l'altitude

(7) $$g = 980,606 - 2,503 \cos 2\lambda - 3 \times 10^{-6} h.$$

A l'équateur, $g = 978,103$; au pôle, 983,109, et à Paris, 980,960.

g a une grande importance physique : c'est la force exercée, en vertu de la pesanteur, sur l'unité de masse.

La *masse*, que Lamé a définie le coefficient de résistance de la matière au mouvement, est égale au rapport constant de la force à l'accélération produite, ou encore des poids à l'accélération de la pesanteur :

$$m = \frac{F}{j} = \frac{P}{g}.$$

Si l'on donne la masse d'un point en mouvement, x, y, z ses trois coordonnées à un instant quelconque et X, Y, Z les projections sur les axes de la force appliquée au mobile, on peut écrire

(8) $$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Ce sont les équations différentielles du mouvement ; une intégration fait connaître le mouvement.

Le mouvement peut être donné par ses projections

$$x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t) \qquad \text{et} \qquad z = \psi(t) ;$$

alors on calculera la force par les équations

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\cos\alpha, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = F\cos\beta, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = F\cos\gamma,$$

avec la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Deux relations lient les masses, les vitesses et les forces :

$$(9) \qquad mv - mv_0 = \int_0^t F\,dt.$$

La variation de la quantité de mouvement du mobile pendant un temps t est égale à l'impulsion de la force pendant ce temps (1).

$$(10) \quad \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \int_{s_0}^{s} F\,ds = \mathfrak{T}_{s_0}^{s} = \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

La demi-variation de la force vive du mobile est égale au travail correspondant de la force, dans le déplacement de s_0 *en* s.

La force est donc la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps ou la dérivée de la force vive par rapport au chemin parcouru.

Passons à l'étude des systèmes de points matériels, c'est-à-dire des corps de dimensions finies.

Le mouvement du centre de gravité du système est le même que si toutes les masses y étaient concentrées et si toutes les forces extérieures y étaient transportées parallèlement à elles-mêmes :

$$(11) \quad M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X, \qquad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y, \qquad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z.$$

---

(1) La dérivée par rapport au temps du moment de la quantité de mouvement par rapport à un axe est égale au moment de la résistance des forces par rapport à ce même axe :

$$(9\ bis) \qquad \frac{d}{dt}\left(mx\frac{dy}{dt} - my\frac{dx}{dt}\right) = xY - yX.$$

Quand un solide tourne autour d'un axe, il y a intérêt à considérer la somme $\Sigma m r^2$ des produits de la masse m des points qui le constituent par le carré de leur distance respective r à l'axe : c'est le *moment d'inertie* du corps. Une intégration permet de déterminer cette quantité pour un corps de forme géométrique. On l'écrit souvent

$$\Sigma m r^2 = M k^2, \tag{11 bis}$$

M étant la masse totale du corps et k le rayon de giration. Le moment d'inertie $\Sigma m r_1^2$ autour d'un axe passant par le centre de gravité étant connu, on en déduit le moment d'inertie autour d'un axe parallèle, à la distance a du premier, par la formule

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m r_1^2 + M a^2. \tag{12}$$

Dans un système, chaque point peut être sollicité par deux espèces de forces, les unes, Fe, qui émanent des corps extérieurs (ce sont les forces extérieures), les autres, Fi, provenant des actions mutuelles des points (ce sont les forces intérieures); ces dernières sont dites *centrales* quand elles sont toutes dirigées suivant la droite qui joint les points et qu'elles sont en raison inverse du carré de leur distance.

Le théorème des forces vives, étendu à un système matériel, a pour expression

$$(13)\qquad \left\{ \begin{aligned} \Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} m v_0^2 &= \Sigma \int (X dx + Y dy + Z dz) \\ &= \Sigma \mathfrak{T} F_e + \Sigma \mathfrak{T} F_i. \end{aligned} \right.$$

$\Sigma(X dx + Y dy + Z dz)$ n'est pas nécessairement une différentielle exacte; mais cela a lieu quand toutes les forces sont centrales, et, dans ce cas, on peut écrire

$$\int \Sigma (X dx + Y dy + Z dz) = -V.$$

La fonction V, qui est une fonction des coordonnées x, y et z, s'appelle le *potentiel;* la somme des travaux des forces extérieures étant nulle, il vient donc

$$(14)\qquad \left\{ \begin{aligned} \Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} m v_0^2 &= -(V - V_0), \\ \Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 + V &= \Sigma \tfrac{1}{2} m v_0^2 + V_0. \end{aligned} \right.$$

« La somme des énergies actuelle ($\Sigma \frac{1}{2} m v^2$) et potentielle (V) d'un système, uniquement soumis à des forces centrales, est constante et égale à l'énergie totale » : c'est le principe de la conservation de l'énergie. On dit encore que la somme de l'énergie cinétique ou dynamique et de l'énergie de position est constante. On exprime enfin la même chose en disant que l'énergie totale d'un système soustrait à l'action de toute force extérieure est invariable.

Dirichlet a démontré que le potentiel, correspondant à une position quelconque du système, représente le travail positif que développeraient les forces intérieures, si le système passait de la position considérée à la position d'équilibre stable pour laquelle la fonction V est un minimum.

Considérons enfin le cas où chaque point du système se meut dans un espace limité, ce que Clausius exprime en disant que le système a un *mouvement stationnaire;* alors l'énergie actuelle du système sera

$$(15) \qquad \Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 = - \tfrac{1}{2} \Sigma (Xx + Yy + Zz).$$

« La demi-force vive moyenne d'un système animé d'un mouvement stationnaire est égale à son *viriel.* »

CONSTANTES NUMÉRIQUES.

Densités des solides par rapport à l'eau à 4°.

Acier	7,80	Nickel	8,60
Aluminium	2,56	Or	19,30
Antimoine	6,74	Platine	21,45
Argent	10,51	Plomb	11,35
Bismuth	9,82	Palladium	12,05
Cuivre	8,90	Zinc	7,19
Étain	7,29	Laiton	8,24
Fer	7,80	Maillechort	8,60
Arsenic	5,67	Phosphore	1,77
Charbon de cornue	1,91	Soufre	2,07
Iode	4,95		

Ambre	1,08	Gutta-percha	0,97
Caoutchouc	0,92	Ivoire	1,92
Cire	0,98	Marbre	2,84
Cristal (flint)	3,35	Verre (crown)	2,53
Ébonite	1,15	Verre (Saint-Gobain)	2,49
Glace (HO)	0,92		
Chlorure de sodium	2,14	Sulfate de zinc ($ZnO, SO^3 + 7HO$)	1,96
Sulfate de cuivre ($CuO, SO^3 + 5HO$)	2,30	Gomme arabique	1,47
		Sucre candi	1,61
Aragonite, $\dot{Ca}\ddot{C}$	2,94	Spath $\dot{Ca}\ddot{C}$	2,73
Mica, $\dot{R}$, $\dddot{R}$, $\ddot{Si}^2$, $+ n$Fl	2,90	Sylvine KCl	1,95
Quartz	2,65	Tourmaline $n\dot{R}\dot{Si} + n\dddot{R}\dddot{B}$	3,10

APPLICATIONS.

1. *Les équations du mouvement d'un point matériel attiré vers un centre, proportionnellement à sa distance, sont*

$$x = a \cos kt + \frac{a'}{k} \sin kt, \qquad y = b \cos kt + \frac{b'}{k} \sin kt;$$

on demande de déterminer les accélérations j_x *et* j_y.

$$(1) \qquad j_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x, \qquad j_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = -k^2 y.$$

2. *La Terre fait une révolution en* 23,879 *heures solaires moyennes, soit* 85966 *secondes; calculer sa vitesse angulaire :*

$$\omega = \frac{2\pi}{85966} = 731 \times 10^{-5}.$$

3. *L'accélération totale d'un mouvement curviligne étant* J, *et* N *l'accélération normale, calculer l'accélération tangentielle* T *et l'angle* α *que fait l'accélération totale avec la tan-*

gente à la trajectoire courbe.

$$T^2 = J^2 - N^2,$$

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{N}{T}.$$

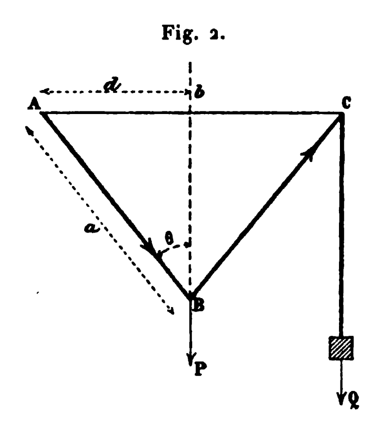
4. *Un bateau à vapeur file* 15 *nœuds; sa vitesse en mètres-seconde est donc égale à* $15 \times 0^m,514 = 7^m,710$; *la fumée qui s'échappe de la cheminée a une vitesse verticale de* $3^m,50$. *Quelle est la vitesse de la fumée et sa direction par rapport au niveau de l'eau?*

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{3,50}{7,71}, \qquad \alpha = 24^\circ\,25',$$

$$V = \sqrt{v^2 + v'^2} = 8^m,46.$$

5. *Un fil, attaché en* A (*fig.* 2), *porte un poids en* B, *passe en* C *sur une poulie très mobile et se trouve tendu par un*

Fig. 2.



poids Q *à son extrémité libre. Le poids* P *étant sur la perpendiculaire élevée au milieu de* AC, *on demande de déterminer le rapport de* P *et de* Q.

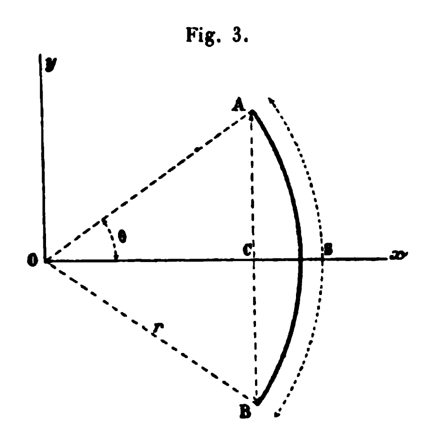
La tension T de CB est égale à Q : projetons les trois forces

P, T, Q sur une horizontale et sur une verticale; il vient

$$T\sin\theta = Q\sin\theta,$$
$$(T+Q)\cos\beta = P,$$
$$\frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{4a^2 - d^2}}{a}.$$

6. *Quel est le centre de gravité d'un arc de cercle de longueur* S, *de rayon r* (*fig.* 3)?

Fig. 3.



(5) $$S x_1 = \int x\,dS,$$
$$x = r\cos\theta, \qquad dS = r\,d\theta.$$

Intégrant entre $\theta = \pm\frac{S}{2r}$, nous aurons

$$S x_1 = \int_{-\frac{S}{2r}}^{+\frac{S}{2r}} r^2 \cos\theta\, d\theta$$
$$= 2r^2 \sin\frac{S}{2r} = rc,$$

en appelant c la corde AB :

« Le centre de gravité de l'arc de cercle est sur le rayon bissecteur, à une distance du centre qui est une quatrième proportionnelle à l'arc, au rayon et à la corde. »

7. *Déterminer la position du centre de gravité d'un secteur circulaire.*

Qu'on décompose le secteur proposé en secteurs infiniment petits : ce seront des triangles dont le centre de gravité se trouvera sur le rayon bissecteur, aux deux tiers de sa longueur à partir du centre. On ramène ce cas au précédent, en considérant que le poids de chaque élément est appliqué à son centre de gravité.

8. *Un fusil est épaulé horizontalement et l'on tire un coup de feu : à quelle distance la balle touchera-t-elle le sol, sachant que la vitesse initiale v_0 est de* 550^m *à la seconde et que l'épaule du tireur est à* $1^m,50$ *du sol? Calculer aussi la portée maximum de cette arme horizontalement et verticalement, sans tenir compte de la résistance de l'air.*

$$x = v_0 t \cos\alpha, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

$$y = x \operatorname{tang}\alpha - x^2 \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Pour $\alpha = 0$, $x = \sqrt{\dfrac{2 v_0^2 y}{g}} = 304^m.$

Portée maximum horizontale : $x_1 = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$

Pour $\alpha = 45°$, $x_1 = \dfrac{v_0^2}{g} = 30836^m.$

Portée maximum verticale : $y_1 = \dfrac{v_0^2}{2g} = \dfrac{x_1}{2}.$

9. *Étude d'un jet d'eau en forme de gerbe.*

Les molécules d'eau, lancées avec une même vitesse, dans des directions différentes, à partir d'un même point, sont renfermées dans un paraboloïde de révolution, ayant la verticale pour axe de figure, et pour méridienne la parabole enveloppe de toutes celles qui sont décrites par les diffé-

rentes molécules. On obtient son équation ainsi qu'il suit :

$$y = x \operatorname{tang}\alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$$

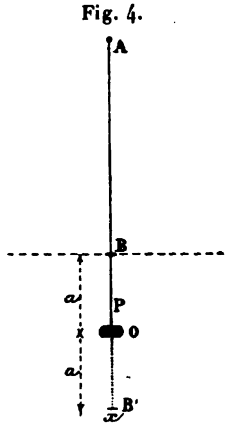
$$\operatorname{tang}\alpha - \frac{2v_0^2}{gx} \operatorname{tang}\alpha + \frac{2v_0^2 y}{gx^2} = 0.$$

Pour que les racines soient réelles, il faut que

$$y \leqq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

10. *Un point matériel est suspendu à un fil élastique* AB, *qui s'allonge d'une longueur* a *sous l'action du poids* P *de cette masse : déterminer les lois du mouvement oscillatoire obtenu en accrochant instantanément la masse à l'extrémité du fil, de manière à lui faire dépasser la position d'équilibre stable* O (*fig.* 4).

Fig. 4.



On peut écrire $P = ka$, car l'allongement est proportionnel au poids :

$$f = P - kx = P\left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

$$\frac{f}{m} = \frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

$$v^2 = \int_0^x 2g\,dx\left(1 - \frac{x}{a}\right) = \frac{g}{a}(2ax - x^2).$$

Le maximum de v correspond à $x = a$; il est égal à $\sqrt{ag}$:

$$dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx}{\sqrt{\frac{g}{a}(2ax - x^2)}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Pour intégrer, posons $x = a - x'$;

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int \frac{-dx'}{\sqrt{a^2 - x'^2}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \arccos \frac{x'}{a} + C.$$

Entre les limites $t = 0$ et $t = T$, durée de la période, et $x = 0$ et $x = 2a$, nous aurons

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Il vient encore

$$\frac{x'}{a} = \cos \sqrt{\frac{g}{a}}\, t,$$

$$v = A \sin mt.$$

11. *Démontrer que, plus un ressort est chargé, plus il oscille lentement.*

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}, \qquad a = \frac{P}{K},$$

$$T = \pi \sqrt{\frac{P}{Kg}}.$$

12. *Une masse est placée en un point, duquel elle est repoussée par une force proportionnelle au carré de sa distance; déterminer la vitesse dont le mobile est animé après avoir parcouru une distance x.*

Soit φ la force répulsive à l'unité de distance; pour une distance x, nous pourrons écrire

$$v \frac{dv}{dx} = \varphi x^2,$$

$$\frac{v^2}{2} = \int_0^x \varphi x^2 d\varphi;$$

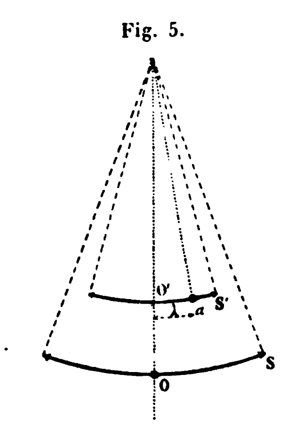
en observant que v est nul, lorsque $x = 0$,

$$v^2 = 2\varphi \frac{x^3}{3}.$$

13. *Deux pendules se meuvent l'un devant l'autre; de Mairan croyait qu'il y aurait toujours fatalement une coïncidence : discuter cette opinion.*

Soient s et s' les arcs parcourus par les deux mobiles dans une oscillation (*fig.* 5); le premier étant en O, supposons le

Fig. 5.



second en a, à une distance λ de O'. Lors de la deuxième oscillation, le second pendule ne sera plus attardé que de $\lambda - \delta$, par suite de l'avance qu'il aura prise. Pour qu'à la $n^{\text{ième}}$ oscillation les deux pendules arrivent en même temps dans la verticale, il suffit, mais il faut que $n\delta = \lambda$. La coïncidence n'est donc pas fatale.

14. *Un pendule fait q oscillations simples, tandis qu'un autre en exécute $p + q$, p et q étant premiers entre eux; calculer la différence n du nombre d'oscillations exécutées par les deux pendules entre deux coïncidences.*

Pour une oscillation simple du premier pendule, le second

en fait $\frac{p}{q}+1$; pour x oscillations du premier, il faut donc en compter $x\left(1+\frac{p}{q}\right)$ du second : la différence est $n = x\frac{p}{q}$. Cette différence doit être un nombre pair et entier comme x; donc il faut que q divise x.

x est donc un multiple de q.

On ne peut faire $x = q$, car on aurait $n = p$, ce qui est impossible ; en effet, p serait pair : donc $p + q$ serait impair.

Mais x peut être égal à $2q$.

Alors $n = 2p$.

15. *Quelle est en dynes l'action exercée, en vertu de l'attraction universelle, par une masse-gramme sur une masse égale, située à l'unité de distance, soit à* $0^{m},01$?

$$f = \varphi \frac{mm'}{r^2}.$$

On détermine φ par l'action exercée par la Terre sur la masse-gramme placée à sa surface;

$$981 = \varphi \frac{M}{R^2} = \varphi \frac{4}{3}\pi RD,$$

R et D étant le rayon et le poids spécifique de la Terre.

$$\varphi = \frac{981 \times 3}{4\pi RD} = \frac{1}{15,125 \times 10^6} = 6,7 \times 10^{-8}.$$

Donc

$$f = 6,7 \times 10^{-8} \text{ dynes.}$$

16. *En supposant la masse de la Terre homogène et de densité égale à* 5,56, *quelle est la valeur de g au fond d'une mine de* 1000^{m} ?

On sait que l'action de la couche sphérique supérieure est nulle au point considéré ; le noyau central agit donc seul.

$$g = \varphi \frac{4}{3} \frac{\pi R^3 D}{R^2} = \varphi \frac{4}{3}\pi RD.$$

Prenons pour R $(6,3709 \times 10^8 - 0,001 \times 10^8)$ centimètres:

$$g = 981 \times \frac{6,3699}{6,3709} = 980,80.$$

17. *Une masse pèse* 1000gr *au niveau de la mer; calculer son poids à une altitude de* 5m.

$$\frac{x}{1000} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \left(1 - \frac{2h}{R}\right) = 999^{gr},99843.$$

18. *Quelle sera la déviation α du fil à plomb à une distance r d'une pyramide de masse m?*

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\varphi \frac{m}{r^2}}{\varphi \frac{M}{R^2}} = \frac{m}{M}\frac{R^2}{r^2}.$$

19. *Quelle masse attire une masse égale avec une force égale à une dyne, à* 0m,01 *de distance?*

$$1 = \varphi \frac{m^2}{1},$$

$$m = 15,125 \times 10^3 = 3889^{gr}.$$

20. *La balance de Cavendish est « une balance à peser le monde »; s'en servir pour déterminer la masse du Soleil, μ.*

Une planète de masse m, dont l'orbite a des axes égaux à a et b, a une accélération $\gamma = K^2 \frac{a}{b^2}\frac{1}{r^2}$, K étant le double de l'aire décrite dans l'unité de temps et r le rayon vecteur.

Or $K = \frac{2\pi ab}{T}$, si T est la durée d'une révolution.

Donc

$$\gamma = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{b^2 T^2} \frac{a}{r^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 r^2}.$$

Mais, si la planète se meut, le Soleil se meut aussi sous l'action $\varphi \frac{m\mu}{r^2}$ qui les sollicite tous deux. La planète a une accélération $\varphi \frac{\mu}{r^2}$, et le Soleil une accélération $\varphi \frac{m}{r^2}$ dirigée suivant la ligne des centres : l'accélération du mouvement relatif de la planète autour du Soleil est la somme de ces accélérations.

Nous pouvons donc écrire

$$\varphi(m + \mu) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

φ est connu, donc μ.

21. *Dans quel système φ serait-il égal à l'unité?*

Dans un système dans lequel on aurait pris pour unité de force l'attraction exercée sur une masse égale à l'unité, par une masse égale, placée à l'unité de distance.

22. *Calculer l'accélération centrifuge à l'équateur.*

(2) $$j'' = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 3,408.$$

23. *Une masse de m grammes est placée dans une fronde de 80cm de longueur; on lui fait faire 2 révolutions par seconde. Déterminer la force centrifuge en dynes.*

$$m \times \frac{4\pi^2}{\frac{1}{4}} \times 80 = m.16\pi^2 \times 80 = 12\,633 \text{ dynes}.$$

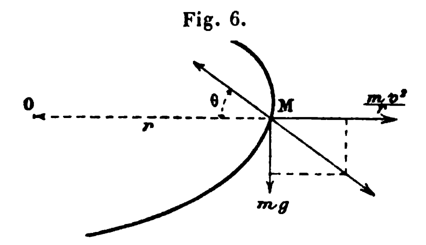
24. *Un vélocipédiste parcourt une circonférence de rayon*

r en une minute ; quelle sera son inclinaison θ sur l'horizon (fig. 6) ?

$$mg = \frac{mv^2}{r} \operatorname{tang}\theta,$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{gr}{v^2} = \frac{gr.\overline{60}^2}{4\pi^2 r^2} = \frac{g.\overline{60}^2}{4\pi^2}\,\frac{1}{r}.$$

Fig. 6.



25. *Un cours d'eau dessine une courbe de 200ᵐ de rayon ; la vitesse du fil d'eau est de 1ᵐ par seconde. Calculer le gradient de l'inclinaison de la surface de l'eau sur l'horizon.*

La résultante de la pesanteur et de la force centrifuge est normale à la surface de l'eau ; le gradient est la tangente de l'angle θ' formé par la surface de l'eau avec l'horizon, dans une section perpendiculaire au cours d'eau.

$$\frac{mv^2}{r} = mg \operatorname{tang}\theta'.$$

Le gradient $= \frac{1}{1962}$.

26. *Quelle vitesse angulaire ω faut-il donner à l'appareil classique de la force centrifuge pour que, dans un tube faisant un angle θ avec la verticale (fig. 7), une masse pesante reste en équilibre à une distance λ de l'axe de rotation ?*

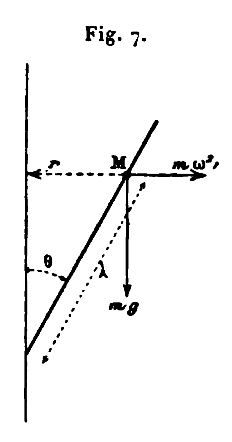
$$m\omega^2 r = mg \cot\theta,$$

$$\omega^2\lambda \sin\theta = g \cot\theta,$$

$$\omega = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{g\cos\theta}{\lambda}}.$$

27. *Un projectile, de surface transversale* S, *de masse* m, *lancé avec une vitesse* v_0, *éprouve de la part de l'air une ré-*

Fig. 7.



sistance ρ *par unité de surface, à cette vitesse* v_0 ; *calculer sa vitesse au bout d'un temps* t.

La force résistante $f = \mathrm{KS}\rho$.

$$ft = mv - mv_0, \tag{9}$$

$$v - v_0 = \frac{ft}{m} = \frac{k\mathrm{S}\rho}{m}t.$$

28. *Quelle force réduirait au repos, au bout de cinq secondes, un corps pesant* 50kg, *tombant de* 122m *de hauteur en chute libre ?*

$$v = \sqrt{2gh} = 49^{\mathrm{m}},04,$$

$$\mathrm{F}.5 = \frac{50}{9,81} \times 49^{\mathrm{m}},04,$$

$$\mathrm{F} = 50^{\mathrm{kg}},021.$$

29. *Trois sphères de masse* m, m' *et* m'' *sont rangées en ligne droite, au contact ; la première est lancée sur* m' *avec une vitesse* v ; *quelle est la vitesse* v'' *communiquée à* m'' ?

Soient v, v' et v'' les vitesses des masses m, m', m'' ; appelons v la vitesse de m après le choc.

$$m(v - v_1) = m'v', \qquad v_1 = v' - v;$$

$$v' = \frac{2mv}{m + m'}, \qquad v'' = \frac{2m'v'}{m' + m''},$$

$$v'' = \frac{4mm'v}{(m + m')(m' + m'')}.$$

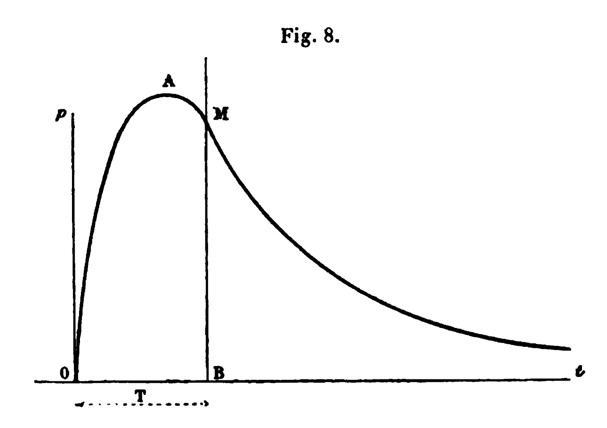
Le maximum de v'' correspond à $m' = \sqrt{mm''}$; on le démontrerait en différentiant par rapport à m' la quantité

$$\left(\frac{m}{m'} + 1\right)(m' + m'')$$

pour déterminer son minimum.

30. *Le général Mayewski a mesuré les pressions développées derrière un projectile pendant qu'il parcourt l'âme du canon : ces pressions, évaluées en kilogrammes par centimètre carré, étant portées en ordonnée et les temps en abscisse, on obtient la courbe de la fig.* 8. *On demande quelle est, au*

Fig. 8.



temps T, *l'impulsion de la force propulsive et la vitesse v du boulet de masse m.*

Soit S l'aire OAMB :

(9) $$FT = S, \qquad v = \frac{S}{m}.$$

31. *Que représenterait cette même aire de la courbe, si, au lieu de porter les temps en abscisse, on y avait porté les avancements successifs x du boulet ?*

(10) $$S = Fx = \tfrac{1}{2} mv^2.$$

L'aire représente donc la demi-force vive et l'on en déduira la vitesse en calculant $\sqrt{\frac{2S}{m}}$.

32. *Un boulet de canon est lancé avec une vitesse de 600 mètres-seconde ; il pèse* 100^{kg} : *quelle est son énergie cinétique en tonnes-mètres et en ergs ?*

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = \frac{0,1}{2 \times 9,81} \times \overline{600}^2 = 1834,913 \text{ tonnes-mètres},$$
$$= \tfrac{1}{2} \times 10^5 \times 36 \times 10^8 = 1,8 \times 10^{14} \text{ ergs}.$$

33. *L'âme de la pièce a* 250^{cm} *de long ; évaluer la force moyenne exercée sur le projectile par les gaz brûlés de l'explosion.*

La force égale l'accroissement moyen de la force vive par unité de longueur $= \frac{1,8 \times 10^{14}}{250} = 0,72 \times 10^{12}$ dynes.

34. *Calculer le moment d'inertie d'un fil fin prismatique, de longueur 2l, de poids p, de densité δ, de section ω, par rapport à un axe transversal passant par son centre de gravité.*

(11) $$dI = \frac{\omega\delta\, dl}{g} l^2,$$

$$I = 2\int_0^l \frac{\omega\delta}{g} l^2\, dl = \frac{2\omega\delta l^3}{3g} = \frac{p}{g}\frac{l^2}{3} = M\frac{l^2}{3}.$$

35. *Calculer le moment d'inertie d'un cylindre droit circulaire creux, de rayons intérieur et extérieur* R_1 *et* R_2, *de hauteur* H, *de densité* δ, *tournant autour de son axe.*

$$dI = \frac{2\pi r}{g} H\, dr\, \delta r^2,$$

$$I = H\delta \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\pi r^3}{g} dr = \frac{2\pi H\delta}{g}\left(\frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi H\delta}{g}(R_2^4 - R_1^4)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{p}{g}(R_2^2 + R_1^2) = \tfrac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2).$$

Sir William Thomson a recommandé l'emploi de ces cylindres creux, qu'on peut centrer facilement et qui donnent le minimum de frottement contre l'air.

36. *Calculer le moment d'inertie d'une sphère de rayon* R, *de densité* δ, *par rapport à son diamètre.*

Partant d'une tranche cylindrique d'épaisseur dx, on peut écrire

$$dI = \frac{\pi\delta}{2g}(R^2 - x^2)\, dx \left(\frac{R^2 - x^2}{2}\right),$$

$$I = \frac{\pi\delta}{2g}\int_0^R (R^2 - x^2)^2\, dx = \frac{\pi\delta}{2g}\,\frac{8}{15}R^5 = \frac{2}{5}\,\frac{p}{g}R^2 = \frac{2}{5}MR^2.$$

37. *Calculer le moment d'inertie d'un parallélépipède rectangle, d'arêtes* l, l', l'', *de densité* δ, *par rapport à un axe parallèle aux arêtes* l'', *passant par le centre de figure* (*fig.* 9).

Pour un élément dont les coordonnées sont x, y, z, et la masse $\frac{\delta}{g}\, dx\, dy\, dz$, dont le carré de la distance à l'axe des z

est $x^2 + y^2$, nous aurons

$$dI = \frac{\delta}{g} dx\, dy\, dz\, (x^2 + y^2),$$

$$I = \frac{\delta}{g} \int\int\int (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz\,;$$

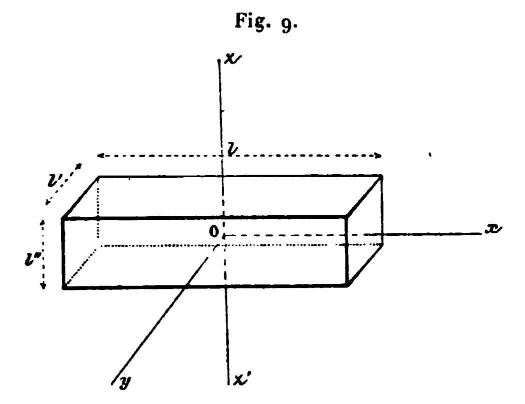
$$I = \frac{\delta}{g} \int\int (x^2 + y^2)\, dx\, dy \int_{-\frac{l''}{2}}^{+\frac{l''}{2}} dz$$

$$= \frac{\delta}{g} l'' \left[\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2\, dx \int_{-\frac{l'}{2}}^{+\frac{l'}{2}} dy + \int_{-\frac{l'}{2}}^{+\frac{l'}{2}} y^2\, dy \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx \right],$$

$$I = \frac{\delta l''}{g} \left(\frac{l^3}{12} l' + \frac{l'^3}{12} l \right) = \frac{l l' l''}{g} \frac{\delta}{12} (l^2 + l'^2)$$

$$= \frac{1}{12} \frac{p}{g} (l^2 + l'^2) = \frac{1}{12} M (l^2 + l'^2).$$

Fig. 9.



38. *Une lame mince allongée est enroulée en anneau ; la lame a oscillé d'abord autour d'un axe passant par son centre, puis on a fait tourner l'anneau autour de son axe. On demande de déterminer le rapport des rayons de giration de la lame et de l'anneau.*

Soient l la longueur de la lame, l' son épaisseur, nous aurons

$$K^2 = \frac{l^2 + l'^2}{12} = \frac{l^2}{12}\left(1 + \frac{l'^2}{l^2}\right).$$

La faible épaisseur de la lame permet d'écrire

$$K^2 = \frac{l^2}{12}.$$

Pour l'anneau, nous déterminons K'^2 par l'équation connue (problème 35)

$$K'^2 = \tfrac{1}{2}(R_2^2 + R_1^2) = \frac{(R_2 + R_1)^2 + (R_1 - R_2)^2}{4}$$

$$= \left(\frac{R_2 + R_1}{2}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}\right)^2\right] = R_2^2.$$

Mais

$$K^2 = \frac{l^2}{12} = \frac{4\pi^2 R_2^2}{12} = \frac{\pi^2}{3} R_2^2.$$

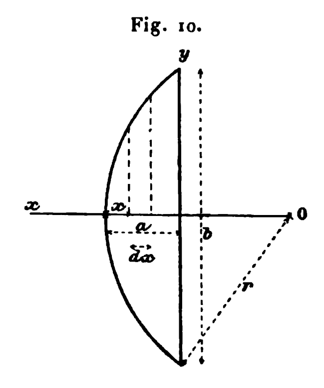
Donc

$$\frac{K^2}{K'^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Le moment d'inertie de la lame est plus grand que celui de l'anneau.

39. *Calculer le moment d'inertie d'une lentille sphérique*

Fig. 10.



plan convexe, de rayon r, d'épaisseur a, de hauteur b, de

densité δ, autour d'une parallèle à l'axe de révolution, placée à une distance l de cet axe.

Considérons une tranche d'épaisseur dx, de rayon y, perpendiculaire à l'axe, et cherchons son moment d'inertie par rapport à l'axe de révolution.

Appelant $d\theta$ l'angle sous-tendu par un élément circulaire, nous aurons d'abord

$$I_y = \frac{\delta\,dx}{g}\int_0^{2\pi}\int_0^y y\,d\theta\,dy\,y^2 = \frac{\delta\,dx}{g}\,\frac{2\pi y^4}{4} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi\delta}{g}\,y^4\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{\pi\delta}{g}\,(2rx - x^2)^2\,dx.$$

Nous aurons donc

$$I = \frac{1}{2}\,\frac{\pi\delta}{g}\int_0^a (2rx - x^2)^2\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\pi\delta}{g}\left(\frac{4r^2a^3}{3} - ra^4 + \frac{a^5}{5}\right).$$

Mais

$$b = a(2R - a).$$

Il vient donc

$$I = \frac{1}{2}\,\frac{\pi\delta}{g}\left[\frac{a(a^2+b^2)^2}{3} - \frac{a^3(a^2+b^2)}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{60}\,\frac{\pi\delta}{g}\,a(a^4 + 5a^2b^2 + 10b^4).$$

On passe ensuite sans difficulté à l'axe proposé (12).

40. *Gauss a employé, dans ses expériences sur le magnétisme, un équipage formé d'un barreau horizontal, sur lequel il fixait, à une distance $\frac{d}{2}$ du centre, des pointes fines destinées à porter deux sphères de rayon r, pesant p grammes; soit q le poids des pointes et K'^2 leur rayon de giration. On demande de déterminer le rayon de giration K^2 des sphères auxiliaires et des pointes qui les supportent.*

Nous avons

$$K^2 = 2(p+q)\frac{d^2}{4} + \frac{2}{5}pr^2 + qK'^2.$$

Le dernier terme est toujours négligeable.

41. *Calculer les mêmes moments d'inertie en fonction des unités* C.G.S.

Il faut faire disparaître g des formules obtenues, car le poids en grammes exprime dès lors la masse.

42. *La poulie d'une machine d'Atwood pèse* 120gr *et elle mesure* 8cm,8 *de rayon; son rayon de giration égale* 8cm,1; *quel poids x faut-il ajouter aux poids à mouvoir* $2P+p$?

Appliquons le théorème des moments des quantités de mouvement.

$$\frac{2P+p}{g}R\frac{dv}{dt} + MK^2\frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = pR.$$

Mais $\frac{dv}{dt} = g_1$, accélération du poids p.

Donc

$$g_1 = g\frac{p}{2P+p+g\frac{MK^2}{R^2}},$$

$$x = 120\left(\frac{81}{88}\right)^2 = 101^{gr}.$$

43. *Une masse m est tombée d'une hauteur* H *à un niveau h; combien a-t-elle actualisé d'énergie potentielle et combien lui en reste-t-il?*

Elle a actualisé une énergie

(14) $$mg(H-h).$$

Il lui reste mgh.

44. *Déterminer le moment C du couple de torsion d'une balance de Coulomb, sachant qu'une baguette de cuivre de* 15cm *de long, pesant* 3gr,18, *suspendue horizontalement par son milieu au fil de torsion, a effectué* 20 *oscillations simples dont la durée moyenne a été de* 6s,04.

$$t = \pi\sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{C}} = \pi\sqrt{\frac{I}{C}},$$

$$I = \frac{pl^2}{3},$$

$$C = \pi^2\frac{pl^2}{3t^2} = 16,13 \text{ en unités C.G.S.}$$

Il faudrait donc, pour tordre le fil de l'unité d'angle, égal à 57°17′44″, un couple dont le moment serait égal à 16,13, la force étant exprimée en dynes et le bras de levier mesûré en centimètres.

45. *Évaluer le moment du couple horizontal* C *d'une suspension bifilaire, formée d'un barreau pesant* 102gr,5, *suspendu par des fils parallèles écartés de* 1cm,5, *longs de* 56cm, *pour une déviation du barreau de* 1°.

Il y a à considérer, dans la suspension bifilaire, le poids du barreau et la tension des fils : en même temps que le barreau tourne autour de son centre, il s'élève et glisse le long de la verticale. Il faut donc écrire les conditions d'équilibre d'un corps libre de tourner autour d'un axe et de glisser le long de cet axe : pour cela, on égale successivement à zéro les projections des forces sur la verticale et la somme de leurs moments par rapport à la verticale passant par le centre du barreau; on en déduit, par un calcul connu, d étant la distance des fils et l leur longueur,

$$C = \frac{Pd^2}{4l}\sin\omega = \frac{102,5 \times \overline{1,5}^2}{4 \times 56}\sin 1° = 17,678 \text{ en unités C.G.S.}$$

46. *Quel est le viriel extérieur d'un corps, de volume* V,

soumis à une pression p uniformément répartie sur sa surface?

La pression sur un élément de surface σ est égale à $p\sigma$, dont les composantes suivant les trois axes coordonnés sont

$$-p\sigma\cos\alpha, \quad -p\sigma\cos\beta, \quad -p\sigma\cos\gamma;$$

α, β et γ étant les angles de la normale à la surface avec les axes. Le viriel est donc égal à

$$(15) \qquad \tfrac{1}{2}(p\sigma\cos\alpha x + p\sigma\cos\beta y + p\sigma\cos\gamma z) = \tfrac{1}{2}p\sigma r\cos\mu,$$

en appelant r la distance de l'élément à l'origine et μ l'angle de la normale avec la droite qui joint l'élément à l'origine.

Mais $r\sigma\cos\mu$ est le triple du volume d'un cône ayant son sommet à l'origine, et l'élément α pour base : en sommant tous les termes analogues, nous aurons trois fois le volume total V.

Le viriel extérieur égale donc $\frac{3}{2}p$V.

CHAPITRE IV.

MÉCANIQUE DES FLUIDES.

Les fluides, liquides ou gaz, sont des corps dont les molécules sont extrêmement mobiles les unes par rapport aux autres. Les liquides peuvent être considérés comme incompressibles; les gaz sont, au contraire, élastiques.

La *densité* δ est la masse de l'unité de volume; le *poids spécifique* $D = \delta g$ est le poids de l'unité de volume; on l'exprime donc en dynes par centimètre cube dans le système C.G.S.

Les pressions s'évaluent par unité d'aire, soit en kilogrammes par mètre carré, soit en mégadynes par centimètre carré dans le système C.G.S. On les évalue encore d'une manière relative en hauteur de mercure; mais cette estimation est incorrecte, parce que le poids d'une colonne de mercure varie d'un lieu à un autre. A Paris, l'intensité de la pression exercée par une colonne de $0^m,76$ de hauteur à $0°$ est égale à 1,014 mégadyne par centimètre carré; en tout autre lieu, elle est égale à $gh\delta$ ou hD dynes.

A une profondeur h, dans un fluide homogène de poids spécifique D, la pression due au poids du liquide est de hD dynes par centimètre carré; si l'on connaît la pression F appliquée en un point particulier sur une surface égale à l'unité, la pression deviendra

$$F + hD. \tag{1}$$

La différence des pressions exercées en deux points, qui ne sont pas sur un même plan horizontal, a pour valeur l'intégrale

$$\int_{z_1}^{z_2} h\,dz. \tag{2}$$

Dans un fluide élastique, on a

$$d\upsilon = \mathrm{D}\,dz \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D} = \mathrm{K}p\,;$$

d'où

$$(3) \qquad p = p_0 e^{\mathrm{K}z}.$$

La pression exercée par un fluide sur un élément de surface est normale à cet élément ; si p est la pression uniformément répartie, et ds un élément, la somme des pressions sur une surface finie est égale à l'intégrale $\int p\,ds$ étendue à tous ses éléments.

Quand la surface est plane, les pressions sur les divers éléments sont parallèles, et elles ont une résultante unique appliquée au *centre de pression*. On détermine les coordonnées x_1, y_1, z_1 de ce centre, comme celles du centre des forces parallèles, par les formules

$$(4) \qquad x_1 = \frac{\Sigma p\,x\,ds}{\Sigma p\,ds}, \qquad y_1 = \frac{\Sigma p\,y\,ds}{\Sigma p\,ds}, \qquad z_1 = \frac{\Sigma p\,z\,ds}{\Sigma p\,ds}.$$

Au cas où la surface ne serait point plane, ces forces n'admettraient pas nécessairement une résultante unique.

Si l'on appelle X, Y et Z les composantes parallèles aux axes de toutes les forces qui sollicitent un élément de fluide, dont les coordonnées sont x, y et z, on a

$$(5) \qquad dp = \mathrm{D}(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz)\,;$$

cette équation différentielle permet d'établir la loi suivant laquelle p varie d'un point à un autre, dans un fluide soumis à des forces quelconques.

Pour une surface de niveau, dans laquelle la pression est constante en tous points, on a évidemment

$$(6) \qquad \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = 0\,;$$

c'est l'équation différentielle des surfaces de niveau.

Lorsqu'une masse fluide passe du volume v_0 au volume v_1, en exerçant constamment sur le milieu ambiant une pression

égale à celle de ce milieu, le travail extérieur produit est égal à

$$(7) \qquad \int_{v_0}^{v_1} p\,dv.$$

Faisons couler un liquide, sous une charge h, par un orifice percé en mince paroi : par application du théorème des forces vives, nous déterminerons la vitesse d'écoulement w par la formule

$$(8) \qquad \tfrac{1}{2} m w^2 = mg(h + p_0 - p_1),$$

si p_0 et p_1 sont les pressions exercées sur la surface libre et sur l'orifice, exprimées comme h en hauteur du fluide qui s'écoule.

Dans le cas particulier d'un liquide incompressible, cette formule devient, en négligeant $p_0 - p_1$,

$$(9) \qquad w = \sqrt{2gh}\,;$$

c'est l'expression du *théorème de Torricelli*.

Quand on fait couler un gaz, il faut tenir compte de son expansibilité et du travail extérieur produit; l'équation fondamentale de ce phénomène est de la forme

$$(10) \qquad \frac{w^2}{2g} = p_0 v_0 - p_1 v_1 + \int_{v_0}^{v_1} p\,dv,$$

dans laquelle p_0 est la pression du réservoir qui débite le gaz et p_1 la pression de l'atmosphère dans laquelle le gaz se répand. Admettons que le gaz, en passant d'un réservoir dans l'autre, conserve une température constante : la loi de Mariotte lui est applicable, et l'on a

$$(11) \qquad \frac{w^2}{2g} = p_0 v_0 \log' \frac{p_0}{p_1} = \frac{p_0}{D_0} \log' \frac{p_0}{p_1}.$$

C'est la formule de Navier.

CONSTANTES NUMÉRIQUES.

Densités des liquides par rapport à l'eau à 4°.

Acide acétique, $C^4H^3O^3,HO$	1,07
» chlorhydrique saturé à zéro	1,17
» nitrique, AzO^5,HO	1,52
» » $AzO^5,4HO$	1,42
» » du commerce	1,22
» sulfurique, SO^3,HO	1,85
» » à 50° Baumé	1,53
» » à 40° Baumé	1,38
Alcool absolu	0,79
Mercure	13,596
Pétrole	0,88
Naphte	0,85
Huile d'olives	0,91
Solution de ZnO,SO^3 à 5 pour 100	1,03
» » à 10 »	1,06
» » à 15 »	1,09
Solution de CuO,SO^3 à 5 »	1,03
» » à 10 »	1,07
» » à 15 »	1,10

Densités de l'eau à diverses températures.

°	
0	0,999871
4	1,000000
5	0,999990
10	0,999947
15	0,999160
20	0,998259
50	0,988100
100	0,958632

Densités des gaz δ par rapport à l'air et poids spécifiques D *en grammes par litre.*

	δ.	D.
Oxygène	1,1056	1,430
Hydrogène	0,0692	0,0896

	δ.	D
Azote	0,971	1,256
Chlore	2,47	3,180
Ammoniaque	0,597	0,761
Protoxyde d'azote	1,527	1,971
Acide sulfureux	2,25	2,87
Oxyde de carbone	0,968	1,254
Acide carbonique	1,529	1,977
Formène	0,558	0,716
Éthylène	0,971	1,524
Acétylène	0,92	1,165

Densités des vapeurs par rapport à l'air.

Alcool	à 78°,4	1,61
Benzine	80,9	2,76
Chloroforme	61	4,20
Eau	100	0,622
Éther sulfurique	35,5	2,59
Mercure	350	6,97
Sulfure de carbone	48	2,64

APPLICATIONS.

1. *Calculer le poids spécifique, en dynes par centimètre cube, de l'air sec, à zéro, sous une pression de 1,02 mégadyne.*

La densité de l'air sec, à zéro, est égale à 0,001293 à Paris, sous la pression de 1,014 mégadyne : nous aurons donc, pour le poids en dynes de 1^{cc},

$$D = 0,001293 \times 981 \times \frac{1,020}{1,014} = 1,27.$$

2. *A l'équateur, le baromètre marque 76^{cm}; quelle est la hauteur équivalente à Paris?*

$$p = 978,103 \times 76 \times 13,596 = 980,96 \times x \times 13,596,$$
$$x = 75^{cm},88.$$



3. *Quel est le poids spécifique* D_1 *de l'hydrogène au pôle?*

A Paris, Regnault a trouvé $0^{gr},0896$ par litre.

$$D_1 = 0,0000896 \times 983,109 = 0,088 \text{ dyne};$$

car la pression normale est égale à

$$983,109 \times 76 \times 13,596.$$

4. *Évaluer en dynes la pression normale à Lille, par* $50° 38' 44''$ *de latitude et* 24^m *d'altitude.*

$$\begin{aligned} g &= 980,606 + 2,503 \times \cos 78° 42' 32'' - 3.10^{-6} \times 24 \\ &= 981,096, \qquad (7, \text{III}) \end{aligned}$$

$$x = 981,096 \times 76 \times 13,596 = 1,01376 \times 10^6 \text{ dynes}.$$

5. *Évaluer en dynes la pression d'un centimètre et d'un pouce de mercure, à Paris, pour* $g = 981$.

Un centimètre équivaut à 13337 dynes.
Un pouce vaut $2^{cm},54$, soit 33876 dynes.

6. *Un vase est animé d'un mouvement de rotation autour de son axe; il renferme de l'eau. Déterminer la forme de la surface libre du liquide et calculer le nombre de tours nécessaire pour qu'un point* A *de cette surface, placé à* 10^{cm} *de l'axe, soit sur une pente de* $20°$ (*fig.* 11).

Nous avons, pour une vitesse ω,

$$X = m\omega^2 x, \qquad Y = m\omega^2 y, \qquad Z = mg.$$

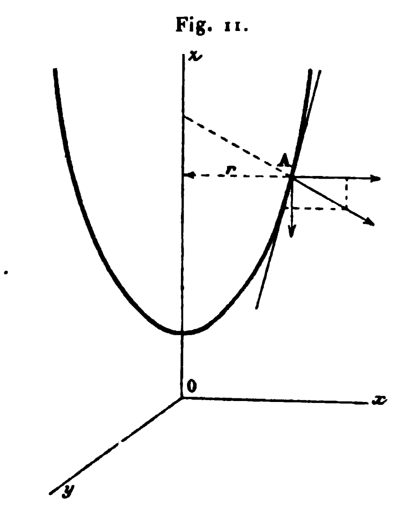
Les équations différentielles des surfaces de niveau sont donc

$$(6) \qquad \begin{cases} \omega^2 x\,dx + \omega^2 y\,dy - g\,dz = 0, \\ z = \dfrac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + C. \end{cases}$$

Ce sont des paraboloïdes de révolution autour de l'axe des z : la méridienne a pour équation

$$z = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + C.$$

Fig. 11.



D'autre part,

$$mg \operatorname{tang} 20° = m\omega^2 r = m\left(\frac{2n\pi}{60}\right)^2 r,$$
$$n = 32,55.$$

7. *Une porte d'eau, pivotante sur son axe* Oy, *est formée d'un rectangle* ABCD *et d'un quart de cercle* ADE *de rayon* R; *calculer la longueur* AB *à donner au côté horizontal du rectangle pour que la porte s'ouvre dès que l'eau affleure en* EAB (*fig.* 12).

Posons AB $= a$ et égalons les moments des pressions exercées sur le cercle et le rectangle par rapport à l'axe.

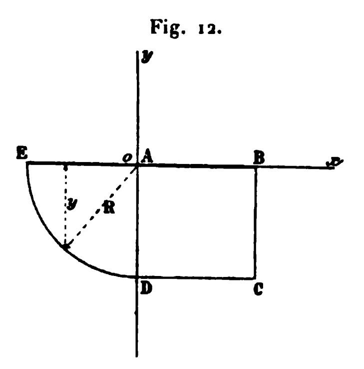
$$\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} xy\,dx\,dy = \int_0^a \int_0^R xy\,dx\,dy.$$

Intégrant et réduisant,

$$\frac{R^4}{2} = R^2 a^2$$

$$a^2 = \frac{R^2}{2}.$$

Fig. 12.



8. *Déterminer la pression totale et le centre de pression pour une surface rectangulaire de hauteur h, de largeur l, placée verticalement dans l'eau et affleurant la surface :*

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} P &= lhD\frac{h}{2} = \frac{lh^2}{2}g, \quad \text{car } D = g;\\ Pz_1 &= lh^2\frac{gh}{3},\\ z_1 &= \frac{2}{3}h. \end{aligned}\right.$$

9. *On superpose dans une fiole cylindrique quatre liquides de densités différentes : comparer les pressions exercées par ces liquides sur la surface latérale du vase, sachant que les masses du liquide sont égales.*

Soient D_1, D_2, D_3 et D_4 les poids spécifiques des quatre liquides ; h_1, h_2, h_3 et h_4 leurs hauteurs respectives, et R le rayon de la fiole.

La pression exercée sur le liquide inférieur est égale à

$$D_1h_1 + D_2h_2 + D_3h_3 = 3D_1h_1;$$

la pression sur la paroi est donc

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\pi R \int_0^{h_4} (3D_1h_1 + D_4h)\,dh &= 6\pi R h_1 D_1 h_4 + \pi R D_4 h_4^2 \\ &= \pi R (h_4 D_4)^2 \frac{7}{D_4}. \end{aligned} \right.$$

Les pressions des quatre liquides seront entre elles comme

$$\frac{7}{D_4}, \quad \frac{5}{D_3}, \quad \frac{3}{D_2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{D_1}.$$

10. *Un manomètre, en forme de siphon, contient du mercure, de niveau dans les deux branches; on produit d'un côté un excès de pression qui déprime le mercure d'une hauteur* z_0 ; *on demande la durée de l'oscillation ainsi produite, sachant qu'il y a dans chaque branche une hauteur h de mercure?*

La section du tube étant s, on a

$$mj = sh\delta \frac{d^2z}{dt^2} = -2g\delta s z,$$

$$h\frac{d^2z}{dt^2} + 2gz = 0,$$

$$z = z_0 \cos\sqrt{\frac{2g}{h}}\,t,$$

$$T = \pi\sqrt{\frac{h}{2g}} \qquad (10, \text{III}).$$

Cette période est la même que pour un pendule de longueur $l = \frac{h}{2}$: Newton avait formulé cette loi dans ses *Principes ;* elle est à retenir.

11. *Une colonne verticale de* 20^m *de hauteur est remplie d'air, à la pression normale; calculer en kilogrammes la pression totale exercée sur la surface latérale, sachant que la colonne est cylindrique et que son rayon* R *est égal à* $0^m,5$.

$$(3) \qquad p = 2\pi R p_0 \int_0^h e^{kz},$$

$$\frac{2\pi R p_0}{K}(e^{kh} - 1) = \frac{2\pi R p_0}{K}\left(\frac{hK}{1} + \frac{h^2K^2}{1.2} + \ldots\right)$$
$$= 2\pi R p_0 h = 62^m,83 \times 10333 = 649 \text{ tonnes}.$$

En nous arrêtant au premier terme du développement de $(e^{kh} - 1)$, nous négligeons K : la valeur de ce coefficient est du reste fort petite.

En rapportant le poids spécifique au kilogramme par mètre cube, et la pression au kilogramme par mètre carré, nous avons

$$K = \frac{1,293}{10333} = 1,25 \times 10^{-4}.$$

Il faut observer que K varie avec la température.

12. *Un baromètre marque* $0^m,760$ *au pied d'une tour, et* $0^m,754$ *au sommet; quelle est la hauteur de la tour?*

$$(3) \qquad p = p_0 e^{kz},$$

$$z = \frac{1}{K}\log'\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{1}{K}\frac{1}{0,4343}\log\frac{760}{754}.$$

Ici nous prendrons pour K la valeur $\dfrac{0,001293}{0,760 \times 13,596}$ qui est encore égale à $1,25 \times 10^{-4}$.

Il vient

$$\frac{1}{K}\frac{1}{0,4343} = 17810,$$

$$z = 17810 \times \log 1,00795 = 61^m,23.$$

C'est la formule de Halley.

La formule de Laplace est, en tenant compte des températures,

$$z = 18393[1 + 2 \times 10^{-3}(t_0 + t_1)] \log \frac{p}{p_0}.$$

13. *On a observé, en deux points d'altitude différente, les hauteurs barométriques* H *et* h *aux températures* T *et* t; *calculer la différence de niveau* z *des deux points, en admettant que la tension de la colonne comprise entre les deux stations ait partout la même valeur moyenne* $\frac{H+h}{2}$ *et une température uniforme* $\frac{T+t}{2}$.

Égalons les poids de la colonne d'air et de la différence de hauteur de la colonne mercurielle :

$$1000 z \times 0,001293 \frac{\frac{H+h}{2}}{760} \frac{1}{1 + \alpha \frac{T+t}{2}} = (H - h) 13,596.$$

On en tire

$$z = 1600 \frac{H-h}{H+h}\left[1 + \frac{2(T+t)}{1000}\right].$$

C'est la formule de Babinet.

14. *Un tube de verre de Cagniard-Latour est terminé par deux calottes hémisphériques : démontrer que la chance de rupture est plus grande suivant une génératrice que perpendiculairement à l'axe.*

Soit l la longueur du tube, R le rayon du cylindre, e l'épaisseur du verre et p la pression intérieure du gaz liquéfié.

La pression dans le sens de l'axe $\pi R^2 p$ agit sur une section $2\pi R e$; soit par unité de surface $\frac{Rp}{2e}$; la pression perpendiculaire à l'axe est égale à $(2Rl + \pi R^2)p$ et elle agit sur

une section $(2l + 2\pi R)e$, ce qui fait par unité de surface résistante

$$\frac{(2l+\pi R)Rp}{(l+\pi R)2e} = K\frac{Rp}{2e}.$$

Le facteur K est évidemment plus grand que l'unité, vu surtout la grande longueur de ces tubes par rapport à leur diamètre.

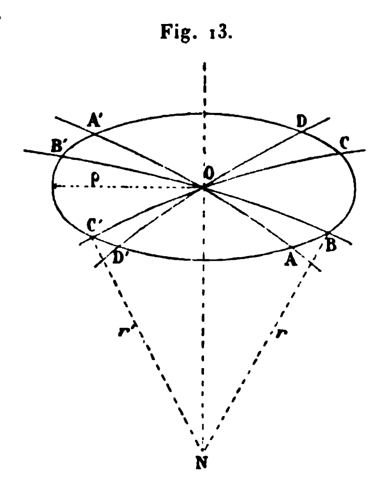
15. *Un aérostat, de forme à peu près sphérique, de* 10^{m} *de diamètre, renferme du gaz d'éclairage sous une pression de* 800^{mm} *de mercure, alors que la pression extérieure est égale à* 760^{mm} *au niveau de la mer; quelle force tendra à déchirer le taffetas, sur une longueur égale à* 1^{m}, *à* 1000^{m} *d'altitude?*

Calculons d'abord la force élastique de l'air à 1000^{m} d'altitude : elle est égale à 670^{mm} environ.

L'excès de pression intérieure égale donc 130^{mm}.

Or considérons (*fig.* 13) un point O de la surface du ballon, et prenons-le pour centre d'une circonférence, de rayon ρ, que nous partagerons en $2n$ parties égales; menons par

Fig. 13.



chaque division un plan normal à la surface. La tension élastique du taffetas étant égale à f par mètre de longueur, la force exercée sur AB est égale à $f \times \mathrm{AB} = f\,\frac{\pi\rho}{n}$, dont la composante normale suivant ON est $f\,\frac{\pi\rho}{n}\,\frac{\rho}{r}$, r étant le rayon de courbure de AOA′; même action sur A′B′, et nouvelle résultante sur ON, égale à $f\,\frac{\pi\rho}{n}\,\frac{\rho}{r}$, soit en tout

$$2f\,\frac{\pi\rho^2}{n}\,\frac{1}{r}.$$

La section perpendiculaire COC′ donnera de même deux résultantes, dont la somme sera

$$2f\,\frac{\pi\rho^2}{n}\,\frac{1}{r'},$$

si nous appelons r' son rayon de courbure. Pour tous les éléments, nous aurons donc

$$\frac{2n}{4}\,2f\,\frac{\pi\rho^2}{n}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)=f\pi\rho^2\left(\frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{\mathrm{R}'}\right),$$

R et R′ étant les courbures principales. Dans le cas d'un ballon dont la forme est celle d'une surface de révolution, $\mathrm{R}=\mathrm{R}'$, et nous pourrons égaler la pression excédante δ de l'intérieur vers l'extérieur à cette force, rapportée à l'unité d'aire.

$$\delta = f\,\frac{2}{\mathrm{R}},$$

$$f = \frac{\mathrm{R}\delta}{2}.$$

Prenant le kilogramme et le mètre pour unités, il vient

$$f = 5 \times \frac{0,130 \times 13,59}{2} = 4^{\mathrm{kg}},418.$$

16. *Calculer le travail qu'il faut dépenser pour comprimer* 50^mc^ *d'air, pris à une atmosphère, et les réduire au volume de* 5^mc^, *à une température constante égale à zéro.*

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{T}_{50}^{5} &= \int_{v=50}^{v=5} p\,dv = p_0 v_0 \log' \frac{v_{50}}{v_5} \\ &= \frac{10333}{1,293} \times 50 \times 1,293 \times \log' 10, \\ &= 10333 \times 50 \times 2,3026 = 1189638^{\text{kgm}}. \end{aligned}\right.$$

17. *Quel temps mettra à se vider, par un orifice de* 1^cq^ *percé en mince paroi dans le fond, un réservoir de forme cubique, mesurant* 1^m^ *de côté et contenant* 1^mc^ *d'eau? On négligera la contraction de la veine.*

S désignant la section du réservoir, s la section de l'orifice, h la hauteur de la surface libre au-dessus de cet orifice, nous aurons

$$-\,S\,dh = s\sqrt{2gh}\,dt,$$

$$\frac{dh}{2\sqrt{h}} = -\,\frac{s}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}\,dt.$$

Intégrant entre les limites o, H, T et o, il vient

$$T = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2H}{g}} = 1^{\text{h}}\,15^{\text{m}}.$$

18. *Trouver la loi des variations de la vitesse* w *dans le cas précédent.*

$$H^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{1}{2}} = +\,\frac{s}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}\,t,$$

$$w = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gH} - \frac{s}{S}\,gt.$$

19. *Quel est le rapport des vitesses d'écoulement de l'eau et de l'air sous une même charge de* 1^cm^ *d'eau?*

Pour l'eau,

$$w = 1^m,40.$$

Pour l'air,

$$w = 38^m 78.$$

La vitesse de l'air est 27,73 fois plus grande que celle de l'eau sous la même charge.

20. *Calculer la vitesse d'écoulement de l'air, maintenu à zéro, passant d'un réservoir à* $0^m,760$ *de pression dans un réservoir à* $0^m,750$.

$$w = \sqrt{\frac{2 \times 9,81 \times (10333 - 10197)}{1,293}} = 45^m,43.$$

Pour une faible différence de pression, la formule de Bernoulli donne des résultats exacts : tel est le cas de ce problème.

CHAPITRE V.

CAPILLARITÉ.

On étudie, sous le nom de *phénomènes capillaires,* les dénivellations et les incurvations de la surface terminale des liquides, au voisinage des parois solides et dans les tubes de faible diamètre.

Laplace a donné, en 1807, une explication de ces faits, basée sur les forces attractives qui s'exercent entre les molécules liquides, dans les limites de leur sphère d'activité; Gauss a élargi cette théorie par une application heureuse du théorème des travaux virtuels. On peut déduire de l'analyse de Laplace, aussi bien que de celle de Gauss, que la surface libre des liquides est le siège de forces de tension, qui ont pour effet de rendre son aire minimum, comme si cette surface était constituée par une membrane élastique, tendant constamment à se contracter sur elle-même.

Il est extrêmement avantageux de faire intervenir, dans l'étude de la capillarité, cette tension de la couche superficielle : elle existe du reste [1], et l'on a pu non seulement la constater, mais encore la mesurer. En partant de ce fait expérimental, Yung donna, en 1805, une théorie mathématique de la capillarité, que Plateau, Dupré, Lamarle et M. Van der Mensbrugghe ont complétée heureusement.

La *tension superficielle* varie avec la nature du liquide et

(1) On a contesté la réalité formelle de la tension superficielle; elle n'aurait qu'une réalité d'équivalence, comme les forces résultantes de la Mécanique. On pourrait en dire autant de la pression exercée par les gaz sur les parois des enceintes qui les renferment, ce qui n'empêche pas d'en raisonner et d'en faire la base d'une théorie.



avec celle du milieu qui est au contact de la surface terminale du liquide. On pourrait la mesurer par le travail nécessaire pour produire un accroissement de la surface égal à l'unité d'aire; mais il est plus facile d'en exprimer la grandeur en fonction de la force qui maintient réunis les bords d'une section faite dans la surface; en conséquence, on l'évalue en dynes par centimètre de longueur.

Le Tableau ci-dessous donne les valeurs les plus probables de la tension superficielle A pour quelques liquides usuels, au contact de l'air, vers 15°.

Liquides.	Densités δ.	Poids spécifiques $\delta g = D$ en dynes.	Tension superficielle A en unités C.G.S.
Eau	0,999	980,02	77,0
Liquide glycérique	1,11	1088,90	27,0
Alcool	0,79	775,00	25,0
Chloroforme	1,50	1471,50	30,0
Éther	0,71	696,50	18,2
Mercure	13,50	13243,50	540,0

L'équation d'équilibre d'une masse liquide isolée est

$$(1) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \text{const.} = \frac{p}{A},$$

R et R′ étant les rayons de courbure principaux au point de la surface considérée et p la pression normale à cette surface par unité d'aire : c'est l'équation d'une surface à courbure moyenne constante (plan, sphère, cylindre droit circulaire, caténoïde). Dans une bulle creuse isolée, telle qu'une bulle de savon, la pression de l'air intérieur surpasse la pression extérieure d'une quantité

$$(2) \qquad \frac{4A}{R}.$$

Contre une paroi plane verticale, avec laquelle l'angle de raccordement est θ, le poids du liquide soulevé par unité de



longueur est $A\cos\theta$, et la hauteur z du ménisque est donnée par l'équation

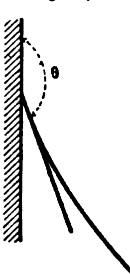
$$(3) \qquad z = \pm\sqrt{\frac{2A}{D}}(1 - \sin\theta),$$

D étant le poids spécifique du liquide (*fig.* 14).

Angles de raccordement θ.

Eau.............	175°20′	(ascension)
Mercure.........	37° à 46°	(dépression)

Fig. 14.



La connaissance de θ est importante ; elle permet de résoudre avec une facilité extrême la plupart des questions de capillarité, en égalant le poids du liquide soulevé ou déprimé à la composante verticale de la tension superficielle.

Dans un tube de rayon r, la dénivellation du liquide est produite par une force

$$(4) \qquad \pm 2\pi r A\cos\theta;$$

$2\pi r$ est le périmètre d'attache. Si l'on appelle h la hauteur moyenne du liquide, on a l'équation d'équilibre

$$(5) \qquad 2\pi r A\cos\theta = \pi r^2 h D.$$

Cette hauteur moyenne du liquide est celle d'un cylindre liquide de poids équivalent à celui du cylindre soulevé ou déprimé ; elle est égale à la distance du point le plus bas du

ménisque au niveau général, augmentée de $\frac{1}{3}r$. L'équation de la surface terminale est

$$z = \frac{A}{D}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\cos\theta. \tag{6}$$

Dans un tube de section droite circulaire, de rayon r, on aura

$$z = \frac{2A}{D}\frac{1}{r}\cos\theta. \tag{7}$$

Entre deux lames parallèles, distantes de δ, cette équation devient

$$z' = \frac{2A}{D}\frac{1}{\delta}\cos\theta; \tag{8}$$

pour $\delta = r$, $z' = z$.

La *loi de Jurin* résume ces résultats : les hauteurs moyennes sont en raison inverse des rayons des tubes ou des distances des lames, *aliis non mutatis*.

Dans un tube conique, à axe horizontal, dont les sections extrêmes ont des rayons r et r', la pression exercée sur les ménisques par unité de surface est égale à

$$\frac{2\pi r A \cos\theta \cos\beta}{\pi r^2} \quad \text{et} \quad \frac{2\pi r' A \cos\theta \cos\beta}{\pi r'^2},$$

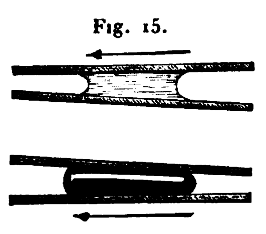
2β étant l'angle au sommet du cône : la différence de ces pressions est égale à

$$2A\cos\theta\cos\beta\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right), \tag{9}$$

et elle pousse la goutte vers le sommet si θ est plus grand que $\frac{\pi}{2}$, vers la base si θ est moindre que $\frac{\pi}{2}$ (*fig.* 15).

La formation des gouttes à un orifice capillaire s'explique enfin par la tension superficielle du liquide ; le poids des

Fig. 15.



gouttes est proportionnel au périmètre d'attache et à la tension A ; c'est la *loi de Tate.*

APPLICATIONS.

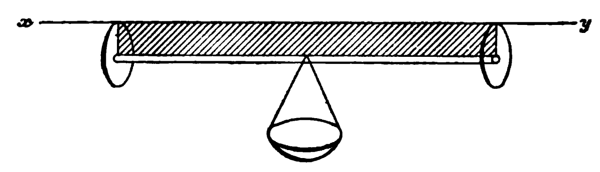
1. *La tension superficielle de l'eau* A *est égale à* 77 *dynes par centimètre : quelle est la valeur numérique a de cette tension en milligrammes par millimètre ?*

$$\frac{a}{A} = \frac{\text{millimètre}}{\text{centimètre}} \times \frac{\text{dyne}}{\text{milligramme}} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{0,981} = \frac{1}{9,81},$$

$$a = \frac{A}{9,81} = 7,85.$$

2. *M. Van der Mensbrugghe tend horizontalement un fil de coton xy, et il dispose en dessous un tube de verre étiré très fin, muni d'anneaux très légers de laiton aux extrémités ; un minuscule plateau de balance en papier est attaché*

Fig. 16.



en son milieu (*fig.* 16). *A l'aide d'un pinceau, il forme entre le fil et le tube une membrane de liquide glycérique, qui soutient le tube et sa charge. Le poids total du tube, des anneaux*

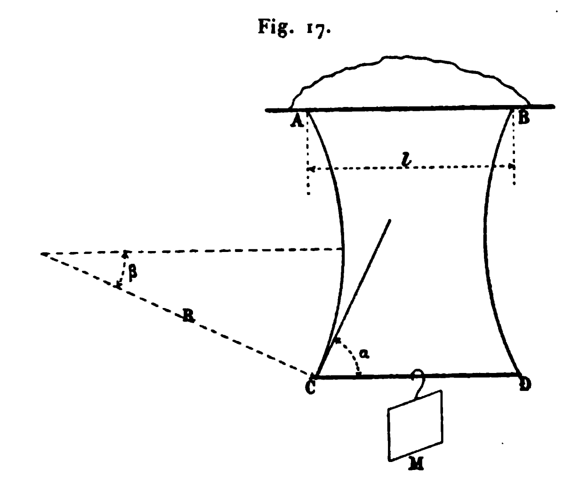
et du plateau est de $0^{gr},71$; *sa longueur égale* 14^{cm}; *on surcharge le plateau de* $0^{gr},05$ *et le tube se détache. Déterminer par cette expérience la tension superficielle du liquide employé.*

$$2Al = \text{charge en dynes} = pg,$$

$$A = \frac{0,71 \times 981}{28} = 26,6.$$

3. *A. Terquem plongeait dans un liquide glycérique une charpente légère formée de deux aiguilles de laiton argenté* AB, CD, *réunies par deux fils de soie* AC *et* BD; *il obtenait de la sorte une lame liquide, limitée latéralement par deux arcs de cercle de rayon* R (*fig.* 17). *Le poids p de l'aiguille*

Fig. 17.



inférieure et de sa charge M *était de* $11^{gr},2$ *et sa longueur* l *de* 120^{cm}. *On demande de calculer la valeur numérique de la tension superficielle* A *du liquide, sachant que* R *égale* 94^{cm} (1),

(1) Le rayon R se déduit de la mesure de $h = AC$ et de la connaissance de l'; on a en effet

$$h = 2R \sin \beta,$$
$$l' = 2\beta R.$$

h se mesure au cathétomètre ainsi que l'; β étant le complément de α, on pourrait calculer de la sorte la valeur de α.

et l', la longueur des fils de soie, égale 33^cm,68 : *on néglige le poids des fils et de la lame liquide.*

En appelant T la tension des fils, on a

$$2Al = p - 2T\sin\alpha = p - 2T\cos\beta.$$

Or on démontre sans peine que $T = 2AR$; il vient donc

$$2Al = p - 4AR\cos\beta,$$

d'où enfin

$$A = \frac{p}{2(l + 2R\cos\beta)} = \frac{p}{2\left(l + 2R\cos\frac{l'}{2R}\right)}.$$

Il faudra multiplier p, exprimé en grammes, par 981 pour l'exprimer en dynes.

Terquem a trouvé par ce procédé une valeur de A égale à 28,45.

4. *On souffle une bulle de savon de* 10^{cm} *de diamètre ; quel est l'excès p de la pression intérieure en dynes par centimètre carré? On prendra pour* A : 28,45.

(1) $$p = \frac{4A}{R} = \frac{4 \times 28,45}{5} = 22,76 \text{ dynes.}$$

5. *On plonge un tube de* $0^{cm},1$ *de rayon dans l'eau ; quelle est la distance du point le plus bas du ménisque au niveau général du liquide ? Le ménisque est supposé sphérique.*

Le volume du ménisque $= \pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^3$,

(5) $$2\pi r A\cos 175°20' = \pi r^2 x D + \frac{1}{3}\pi r^3 D,$$

$$x = 1^{cm},53.$$

6. *Deux lames parallèles, écartées de* $0^{cm},107$, *sont plongées*

dans l'eau ; à quelle hauteur moyenne s'élèvera ce liquide entre les deux lames ?

$$h.0,107.D = 2A\cos\theta,$$
$$h = 1^{cm},46.$$

7. *L'eau s'élève dans un tube capillaire à une hauteur de* 1^{cm} ; *on fait couler une goutte d'alcool dans le tube par la partie supérieure : la colonne s'abaisse aussitôt. Calculer cet abaissement.*

(6) $$\frac{h}{h'} = \frac{A}{A'}, \qquad h = 1 \times \frac{25,5}{77,0} = 0^{cm},33,$$
$$x = 1 - 0,33 = 0^{cm},67.$$

8. *L'alcool s'élève de* $0^{cm},92$ *dans un tube de verre dont la section droite est circulaire et présente* $0^{cm},065$ *de rayon : quelle sera son ascension dans un tube de section elliptique, ayant ses axes respectivement égaux à* $0^{cm},13$ *et* $0^{cm},03$?

(6) $$\frac{h}{h'} = \frac{\frac{2}{R}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1}} = \frac{2R_1R'_1}{R(R_1 + R'_1)},$$
$$h' = h\frac{R(R_1 + R'_1)}{2R_1R'_1} = 1^{cm},23.$$

9. *Laplace demandait à l'abbé Haüy quelle serait l'ascension d'un liquide dans l'espace annulaire compris entre deux tubes de même substance, de rayons r et r'.*

L'ascension sera la même que dans un tube de rayon $r - r'$, car, les volumes étant proportionnels aux périmètres d'attache, on peut écrire

$$\frac{\pi(r^2 - r'^2)h}{\pi(r - r')^2 h'} = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2\pi(r - r')}.$$

Donc $h = h'$.

10. *Calculer la constante capillaire d'un liquide de densité* 0,8, *sachant que la hauteur d'élévation de ce liquide dans un tube de* $0^{cm},1$ *de rayon est de* $1^{cm},3$. *On supposera que le liquide mouille la paroi, c'est-à-dire que l'angle de raccordement est égal à zéro; puis on considérera le cas où cet angle est égal à* 45° (¹).

Il s'agit évidemment de la hauteur moyenne d'élévation du liquide.

Dans le premier cas,

$$2\pi r A = \pi r^2 h D,$$

$$A = \frac{r}{2} h D = 0{,}05 \times 1{,}3 \times 0{,}8 \times 981 = 51.$$

Si nous faisons $\theta = 45°$, nous aurons à diviser ce résultat par $\cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$A = 71{,}91.$$

11. *L'angle de raccordement du mercure avec le verre étant égal à* 37°, *quelle sera la dépression moyenne dans un tube de* $0^{cm},01$ *de rayon?*

$$(5) \qquad 2\pi r A \cos\theta = \pi r^2 h D,$$

$$h = 6^{cm},47.$$

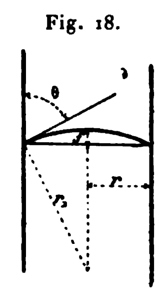
12. *La solution précédente ne convient pas au calcul des dépressions barométriques, parce que* θ *varie de* 36° *à* 46°, *suivant l'état de pureté du mercure et de netteté du verre, et une semblable correction présenterait une grande incertitude* (²). *Les Tables sont basées sur la mesure des flèches des*

(¹) Question posée aux examens de licence par la Faculté des Sciences de Paris, session de juillet, 1885.

(²) Dans un même tube de $0^{cm},4$ de rayon, Bravais a observé des dépressions de $0^{cm},012$ à $0^{cm},079$.

ménisques : on demande de calculer la flèche f dans un tube de $0^{cm},5$ *de rayon pour* $\theta = 40°$ (*fig.* 18).

Fig. 18.



$$f = r_1(1 - \sin\theta) = r\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = r\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right);$$

$$f = 0^{cm},23.$$

Pour $\theta = 46°$, $f = 0^{cm},20$.

13. *A quelle hauteur l'eau s'élève-t-elle contre une paroi verticale parfaitement mouillée ?*

(3) $$z = \sqrt{\frac{2A}{D}} = 0^{cm},396.$$

14. *Mesurer l'aire totale du ménisque soulevé contre une paroi verticale.*

Cette aire égale $\frac{1}{2}z^2$, car le poids du liquide soulevé étant A par centimètre, en dynes, la base du cylindre a pour surface $\frac{A}{D} = \frac{1}{2}z^2$.

15. *Dupré suspendait au plateau d'une balance un anneau de laiton bien décapé, dont l'axe était vertical et la section droite inférieure parfaitement horizontale ; il l'amenait à*

affleurer à la surface de l'eau. Quelle est l'augmentation de poids de l'anneau, dont le rayon est R ?

$$p = 4\pi \mathrm{RA} \text{ en dynes.}$$

16. *On fait adhérer un disque de verre de rayon r à la surface de l'eau; calculer le poids de liquide qu'il soulèvera quand on cherchera à rompre l'adhérence.*

Le poids P du liquide soulevé est égal à la résultante des tensions superficielles sur le pourtour du disque ; pour passer des dynes aux grammes, il faut multiplier par g.

$$\mathrm{P} = 2\pi r g \mathrm{A} \sin\theta.$$

17. *Simon de Metz introduit* $1^{cc},7$ *d'eau entre deux disques circulaires de* $10^{cm},8$ *de diamètre ; il est facile de calculer leur distance e ; on demande de déterminer aussi la charge p nécessaire pour les séparer.*

$$e = \frac{1,7}{\pi r^2} = 0^{cm},019.$$

La charge p est égale au poids d'une colonne d'eau ayant pour base la surface des disques, et pour hauteur h la dénivellation produite entre deux lames séparées par la distance e des disques.

$$h = 5^{cm},5,$$
$$p = 490500 \text{ dynes} = 500^{gr}.$$

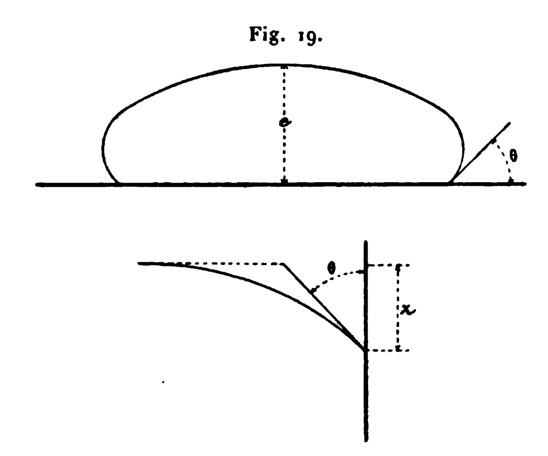
18. *E. Desains a mesuré l'épaisseur d'une goutte de mercure de grand rayon, étalée sur un plan de verre horizontal;* $e = 0^{cm},349$. *La dépression z du même mercure est de* $0^{cm},151$ (*fig.* 19). *En déduire les valeurs de* A *et de* θ *pour ce mercure.*

$$z = \sqrt{\frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{D}}(1 - \sin\theta)}.$$

Quand le plateau devient horizontal, θ augmente de $\frac{\pi}{2}$.

$$e = \sqrt{\frac{2A}{D}(1+\cos\theta)}.$$

Fig. 19.



On en déduit

$$\frac{z^2}{e^2} = \frac{\left(\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right)^2}{2\cos\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad \tang\frac{\theta}{2} = \frac{e - z\sqrt{2}}{e}.$$

Il vient $\theta = 41^\circ 56'$ et $A = 470$, valeur trop faible.

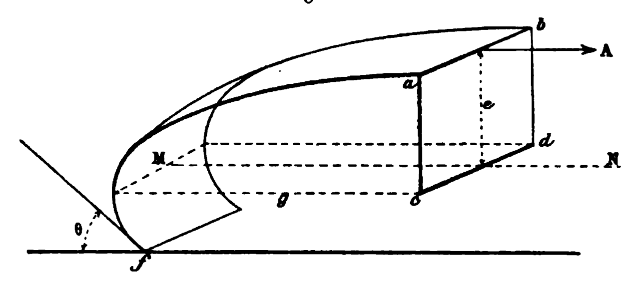
19. *Une goutte de liquide a une hauteur e au-dessus du plan de sa section maximum; déduire de cette donnée la valeur de la tension superficielle de ce liquide. On supposera que la goutte a un rayon infini.*

Menons deux plans verticaux parallèles *acf* et *bdg*, à droite et à gauche du centre de la goutte (*fig.* 20), distants de l'unité de longueur; la pression hydrostatique sur le rectangle *abcd*, situé au-dessus du plan MN de la section maximum, est égale

à la tension A exercée sur le bord *ab*, et nous pouvons écrire

$$A = \frac{e^2 D}{2}.$$

Fig. 20.



C'est la formule employée par M. Quincke.

20. *On plonge verticalement dans l'eau un tube de verre*

Fig. 21.

cylindrique et on l'en retire avec précaution; quelle est la hauteur de la colonne liquide qui y reste suspendue?

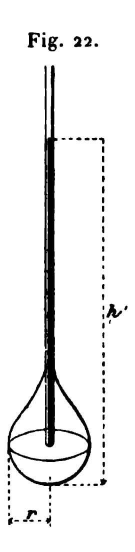
$$\pi r^2 h D = 2 A \cos\theta(\pi r + \pi r').$$

h est égal à la somme des colonnes soulevées dans des tubes de rayons égaux au rayon intérieur et extérieur du tube pro-

posé. Si l'on soutirait de l'eau au ménisque inférieur à l'aide d'un tortillon de papier buvard, de manière à l'aplanir, on aurait $\pi r^2 hd = 2A \cos\theta \pi r$ (*fig.* 21).

21. *Dans un tube capillaire très fin, l'eau est soulevée d'une hauteur h; on retire le tube et il se forme à son extré-*

Fig. 22.



mité une goutte de rayon r; soit h' la hauteur du liquide qui reste suspendu par capillarité. Déduire de h, h' et r la valeur de A (*fig.* 22).

Considérons la portion de la goutte, située au-dessous du grand cercle horizontal du rayon r, comme une demi-sphère. Il y a équilibre entre l'action de la tension superficielle exercée le long de la circonférence $2\pi r$ d'une part, et d'autre part le poids de la demi-sphère augmenté de la pression hydrostatique de l'eau suspendue dans le tube.

$$2\pi A r = \frac{2}{3}\pi r^3 D + \pi r^2 D(h' - r - h),$$

$$A = r(h' - h) - \frac{r^2}{3}.$$

Ce procédé a été appliqué par M. Sentis.

22. *M. Duclaux plonge dans l'eau un densimètre de Gay-Lussac, pesant* $27^{gr},22$, *de* $0^{cm},5$ *de rayon; on verse un peu de vapeur d'éther à la surface du liquide; calculer l'effet de capillarité et en déduire le relèvement de l'instrument.*

Dans l'eau $2\pi A r = 241,7$ dynes
Dans l'éther $2\pi A' r = 57,15$ dynes

Différence...... $184,55$ dynes $= \frac{1}{1447}$ du poids.

Soient Δh le relèvement, et ΔA la différence de tension; on a

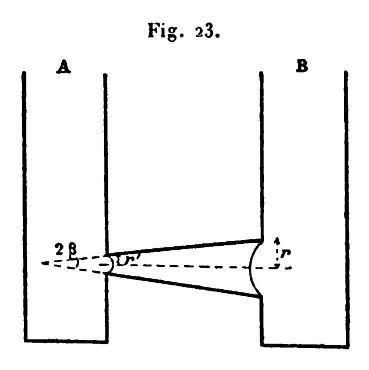
$$2\pi r \Delta A = \pi r^2 \Delta h D,$$

$$\delta h = \frac{2\Delta A}{rD},$$

$\Delta h = 0^{cm},24$.

23. *Deux réservoirs sont en communication par un tube légèrement conique dont l'axe est horizontal et dont les diamètres aux extrémités sont* $0^{cm},1$ *et* $0^{cm},2$; *une goutte d'eau s'est condensée dans le tube qu'elle obstrue* (*fig.* 23). *Quelle*

Fig. 23.



est, en dynes par centimètre carré, la différence de pression compatible avec l'équilibre de la goutte, l'angle 2β *au sommet du cône étant égal à* $15°$.

La différence des pressions est égale à

$$(9)\qquad 2A\cos\beta\cos\theta\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}\right)=1488 \text{ dynes par cent. carré.}$$

La pression est plus grande en A qu'en B.

24. *Yung, ayant introduit une petite quantité d'huile par le sommet d'un tube capillaire plongé dans l'eau, vit le niveau de l'eau baisser notablement : la hauteur moyenne de l'eau était h et celle de l'huile h'. Déduire de cette observation la tension* A' *de l'eau au contact de l'huile.*

Le poids total des deux colonnes liquides soulevées est égal à la somme des poids soutenus par les deux ménisques; supposons-les de même forme; il vient

$$2\pi r(A+A')\cos\theta=\pi r^2(hD+h'D').$$

25. *On donne la tension superficielle* A *d'un liquide en dynes par centimètre de longueur; en déduire le travail* $\mathfrak{C}$ *nécessaire pour faire varier de l'unité d'aire la surface d'une membrane de ce liquide, en unités* C.G.S.

Soit une membrane ABCD fixée en CA, AB et BD, pouvant s'allonger sur son côté CD, et présentant 1^{cq} de surface (*fig.* 24); un accroissement $CDC'D'=dS$ nécessite un travail $\mathfrak{C}dS$; or, ce travail est égal à $A\times C'D'\times CC'$; donc

$$\mathfrak{C}\,dS=A\,dS.$$

La tension superficielle par unité de longueur est numériquement égale au travail rapporté à l'unité d'aire.

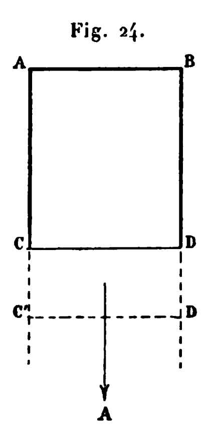
26. *Calculer le travail nécessaire pour doubler le rayon d'une bulle de savon de* 5^{cm}, *la pression extérieure étant de* 76^{cm}; *on évaluera ce travail en ergs.*



La tension superficielle du liquide exige un premier travail égal à $\int_{S_1}^{S_2} 2A\,dS$, soit, d'après les données de la question, égal à

$$8\pi A(R_2^2 - R_1^2) = 8\pi \times 27(\overline{10}^2 - 5^2) = 50892 \text{ ergs}.$$

Fig. 24.



Au lieu d'invoquer les conclusions du problème précédent, nous eussions pu établir directement cette expression du travail moléculaire : nous avons en effet

$$\int p\,dv = \int \frac{4A}{R}\,dv = \int_{R_1}^{R_1} \frac{4A}{R}\, 3\,\frac{4}{3}\pi R^2 dR = 8\pi A(R_2^2 - R_1^2).$$

Mais il faut développer de plus un travail extérieur, employé à refouler la pression de l'atmosphère : ce travail, beaucoup plus considérable que le premier, est égal à

$$p(v_2 - v_1) = 1{,}014 \times 10^6 \times \tfrac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)$$
$$= 3{,}717 \times 10^9 \text{ ergs}.$$

LIVRE II.

CHALEUR.

CHAPITRE I.

DILATATIONS ET CHANGEMENTS D'ÉTAT.

La chaleur dilate les corps.

Le volume d'un corps est donc une fonction de sa température t :

$$v = f(t) = f_0 + f'_0 \frac{t}{1} + f''_0 \frac{t^2}{1.2} + \dots$$

Cette série est toujours assez convergente pour qu'on en arrête le développement aux premiers termes : on emploie le plus souvent, pour représenter le volume des corps aux diverses températures, des formules empiriques de la forme

$$v = v_0(1 + at + bt^2 + ct^3 + \dots).$$

L'expérience donne la valeur du coefficient moyen de dilatation entre des températures t et t' ;

$$(\mathrm{K})_{t'}^{t} = \frac{v' - v}{v_0(t' - t)}.$$

Constatons que K est une fonction de t et de t'.

Le coefficient vrai $\frac{dv}{dt}$ est donné par le calcul

$$(1) \qquad \mathrm{K}_t = \frac{dv}{dt} = a + 2bt + 3ct^2 + \dots$$

Pour certains corps, on peut écrire plus simplement $v = v_0(1 + at)$; alors K est constant et égal à a.

D'une manière plus générale, si nous représentons la dilatation cubique par γ, nous aurons $v = v_0(1 + \gamma)$; pour un corps isotrope, les variations de surface d'une section plane seront données par la formule $S = S_0(1 + \gamma)^{\frac{2}{3}} = S_0(1 + \frac{2}{3}\gamma)$ et les variations de longueur d'une arête rectiligne par la formule $L = L_0(1 + \gamma)^{\frac{1}{3}} = L_0(1 + \frac{1}{3}\gamma)$. Les coefficients de dilatation linéaire sont donc égaux au tiers et les coefficients de dilatation superficielle aux deux tiers de la dilatation cubique du corps.

Les températures se mesurent par les variations de volume d'un corps dont le coefficient de dilatation reste constant dans les limites de l'expérience : on a dans ce cas $t = \frac{v - v_0}{a}$.

Dans les corps anisotropes, la valeur du coefficient linéaire varie avec la direction que l'on considère. M. Fizeau a appelé *dilatations principales* celles que l'on observe dans la direction des axes d'élasticité : nous les écrirons δ', δ'' et δ'''. On démontre que le coefficient de dilatation δ, dans une direction quelconque définie par ses angles α, β et γ avec les axes, est égal à

$$(2) \qquad \delta = \delta' \cos^2\alpha + \delta'' \cos^2\beta + \delta''' \cos^2\gamma.$$

Le coefficient de dilatation cubique Δ est égal à la somme des trois coefficients de dilatation principaux :

$$\Delta = \delta' + \delta'' + \delta'''.$$

Dans la dilatation, une face plane reste plane, mais elle cesse d'être parallèle à sa position première; soit

$$A = ax + by + cz$$

l'équation de cette face à zéro : à t degrés, elle devient

$$(3) \qquad A = \frac{aX}{1 + \delta' t} + \frac{bY}{1 + \delta'' t} + \frac{cZ}{1 + \delta''' t};$$

X, Y et Z sont les coordonnées d'un point de la face à t^o.

$$X = x(1 + \delta' t), \qquad Y = y(1 + \delta'' t), \qquad Z = z(1 + \delta''' t).$$

Les gaz se dilatent avec une grande régularité, et l'on peut représenter très exactement leurs variations de volume et de pression par les formules

$$v = v_0(1 + \alpha t),$$
$$p = p_0(1 + \alpha' t);$$

α est le coefficient de dilatation *sous pression constante* et α' le coefficient *à volume constant*. Sauf pour l'hydrogène, α est plus grand que α' : cette différence croît pour un même gaz avec la pression, pour des gaz différents avec leur compressibilité ; il est probable qu'elle serait nulle à l'état parfait, si les gaz suivaient la loi de Mariotte.

On a entre les volumes et les pressions d'un gaz à diverses températures la relation

$$(4) \qquad \frac{pv}{1 + \alpha t} = \frac{p'v'}{1 + \alpha t'} = \text{const}.$$

La valeur de la constante dépend de la nature du gaz.

Le second effet de la chaleur est un changement d'état : les solides fondent, les liquides se vaporisent.

Les vapeurs surchauffées, qui ne sont pas en présence de leur liquide générateur, ont les mêmes propriétés que les gaz ; f étant leur tension, on a

$$(5) \qquad \frac{fv}{1 + \alpha t} = \text{const}.$$

Pour les vapeurs saturées, il n'en est plus ainsi : elles ont une *tension maximum* F, qui est indépendante de leur volume, mais qui augmente avec la température.

Les physiciens ont établi des formules empiriques, permettant de calculer leur tension maximum en fonction de



la température. Pour l'eau, Biot et Regnault ont adopté la fonction

$$\log \mathrm{F} = a + b\alpha^t + c\beta^t; \tag{6}$$

F est une hauteur de mercure évaluée en millimètres. Le terme $c\beta^t$ est très petit relativement à $b\alpha^t$; on le néglige quelquefois. Pour la plupart des liquides, b est négatif et α plus petit que l'unité.

On emploie aussi la formule de Duperrey

$$\mathrm{F}_k = \theta^4, \tag{7}$$

dans laquelle F_k exprime la pression en kilogrammes par centimètre carré et θ la température en centaines de degrés centigrades.

CONSTANTES NUMÉRIQUES.

Dilatations linéaires.

Argent	$0,1910 \times 10^{-2}$
Cuivre	$0,1712 \times 10^{-2}$
Fer	$0,1235 \times 10^{-2}$
Laiton	$0,1867 \times 10^{-2}$
Or	$0,1466 \times 10^{-2}$
Platine	$0,8565 \times 10^{-3}$
Verre (flint)	$0,8117 \times 10^{-3}$
Zinc	$0,2942 \times 10^{-2}$

Dilatations cubiques.

Alcool à 0°	$0,10 \times 10^{-2}$
» à 78°,4	$0,13 \times 10^{-2}$
Chloroforme à 0°	$0,11 \times 10^{-2}$
Eau à 0°	$0,60 \times 10^{-4}$
» à 100°	$0,44 \times 10^{-3}$
Éther à 0°	$0,15 \times 10^{-2}$
Mercure de 0° à 50°	$0,180 \times 10^{-3} = \frac{1}{5550} = \delta$
» » 100°	$0,181 \times 10^{-3}$
» » 150°	$0,182 \times 10^{-3}$

Verre de 0° à 50°	$0{,}26 \times 10^{-4} = \frac{1}{38700} = K$
» » 100°	$0{,}27 \times 10^{-4}$
» » 150°	$0{,}28 \times 10^{-4}$

Dilatations apparentes dans le verre.

Alcool	$0{,}11 \times 10^{-2}$
Eau	$0{,}47 \times 10^{-3}$
Huile d'olive	$0{,}80 \times 10^{-3}$
Acide sulfurique	$0{,}60 \times 10^{-3}$
Mercure	$0{,}154 \times 10^{-3} = \frac{1}{6480}$

Dilatations des gaz.

	Pression.	Coefficient de dilatation sous pression constante.
	mm	
Hydrogène	760	$0{,}3661 \times 10^{-2}$
	2545	$0{,}3662 \times 10^{-2}$
Air	380	$0{,}3650 \times 10^{-2}$
	760	$0{,}3670 \times 10^{-2}$
	2525	$0{,}3691 \times 10^{-2}$
Acide carbonique	760	$0{,}3709 \times 10^{-2}$
	2520	$0{,}3846 \times 10^{-2}$
Acide sulfureux	760	$0{,}3902 \times 10^{-2}$
	980	$0{,}3980 \times 10^{-2}$

Tension des vapeurs saturées en millimètres de mercure.

Températures.	Eau.	Alcool.	Éther.	Sulfure de carbone.	Mercure.
°					
— 32	0,32	»	»	»	»
— 20	0,93	3,34	68,90	47,30	»
0	4,60	12,70	184,39	127,91	»
+ 10	9,17	24,23	286,83	198,46	»
20	17,39	44,46	432,78	298,03	»
30	31,55	78,52	634,80	434,62	»
40	54,91	133,69	907,04	617,53	»
50	91,98	219,90	1264,83	857,07	»
75	288,50	665,54	2645,41	1779,88	»
100	760,00	1697,55	4953,30	3325,15	0,75
150	3581,23	7318,40	»	9095,94	4,27
200	11688,90	»	»	»	19,90

Points de fusion.

Platine	2000°	Antimoine	430°
Fer	1500	Zinc	360
Or	1200	Plomb	325
Fonte de fer	1200	Bismuth	270
Verre	1150	Étain	230
Cuivre	1100	Potassium	58
Argent	1000		

APPLICATIONS.

1. *Un thermomètre a un volume* V *de* $7^{cc},6$, *déterminé par une pesée dans l'eau ; sa densité moyenne* D *est égale à* 4,32. *A* 203°, *le liquide dilaté remplit tout le tube. Calculer le volume* V_1 *du mercure renfermé dans l'instrument, sachant que la densité* D' *du verre est égale à* 2,52, *et que son coefficient de dilatation cubique* $K = 0,29 \times 10^{-4}$.

A zéro,

$$VD = V_1 . 13,596 + (V - V_1) D';$$

d'où

$$V_1 = V \frac{D - D'}{13,596 - D'}.$$

A $t°$, quand le liquide dilaté remplit tout le tube,

$$V_1 (1 + \delta t) = V (1 + K t) \frac{\dfrac{D}{1 + K t} - \dfrac{D'}{1 + K t}}{\dfrac{13,596}{1 + \delta t} - \dfrac{D'}{1 + K t}},$$

$$V_1 = V \frac{D - D'}{13,596 - D' \dfrac{1 + \delta t}{1 + K t}} = 1^{cc},25.$$

Ce calcul est très utile pour les opérations de calorimétrie.

2. *On propose de vérifier le calibrage d'un thermomètre, gradué de* 0° *à* 250° ; *à cet effet, on fera glisser dans le tube*

un index de mercure, ayant une longueur d'environ 50 *divisions, et l'on relèvera ses positions et ses longueurs en fonction des divisions, sur la machine à diviser ; or l'index a occupé les longueurs ci-dessous :*

	Longueur. div	ε.
De 0,3 à 50,7........	50,4	+0,4
De 50,6 à 100,9........	50,3	+0,3
De 100,1 à 150,1........	50,0	0,0
De 150,4 à 200,3........	49,9	−0,1
De 199,6 à 249,4........	49,8	−0,2

De plus, le zéro exact est à + 0,5 *et le* 100 *exact à* 100,1.

Le but de cette opération est d'évaluer les volumes correspondants à des intervalles de 50 divisions de l'échelle. Le résultat demandé est de calculer les corrections à faire subir aux traits 0, 50, 100, 150, 200 et 250 pour en déduire les températures respectives.

Une augmentation de volume égal à celui de l'index représente une variation de

$$\frac{100 + 0,5 - 0,1 + 0,4 + 0,3}{2} = 50^{\circ} + 0^{\circ},55.$$

Traits.	Corrections.	
0..........	− 0,5	− 0, 5
50..........	− 0,55 − 0,5 − 0,4	− 0,35
100..........	− 0,35 + 0,55 − 0,3	− 0,10
150..........	− 0,10 + 0,55 + 0,0	+ 0,45
200..........	+ 0,45 + 0,55 + 0,1	+ 1,10
250..........	+ 1,10 + 0,55 + 0,2	+ 1,85

Voici dès lors la valeur des traits :

Traits.	0	50	100	150	200	250
Températures.	−0°,5	+49°,65	99°,9	150°,45	201°,10	251°,85

Pour un trait quelconque, on procédera par interpolation.

3. *Construire par un procédé graphique la courbe de calibrage d'un thermomètre dans lequel l'index a pris des longueurs l quand son extrémité postérieure coïncidait avec les divisions a.*

l	20,2	20,0	19,8	19,6	19,3	19,0	18,6	18,1
a	0	40,5	80,9	120,0	160,3	201,0	241,8	279,9

Tracez d'abord une courbe en prenant les a pour abscisses et les l pour ordonnées : soit la courbe AB de la *fig.* 25. Sur cette courbe, mesurez l'ordonnée λ qui correspond à l'abscisse $a + l$, l'ordonnée λ' qui correspond à $a + l + \lambda$, et ainsi de suite : cette mesure se reporte au compas. Nous partons sur la figure d'une valeur a égale à zéro.

La dernière ordonnée correspond à une abscisse 291,8 égale à $l + \lambda + \lambda' + \lambda'' + \ldots + \lambda'''$, située vers l'extrémité du tube. Entre ces divisions 0 et 291,8 l'index est contenu 15 fois ; sa longueur moyenne est donc $\frac{291,8}{15} = 19,5$. Si le tube avait été cylindrique, on aurait dû lire :

Divisions.	
A la 1re	0
A la 2e	19,5
A la 3e	$2 \times 19,5 = 39$
A la 4e	$3 \times 19,5 = 58,5$

La correction de calibrage est donc :

Divisions.		
Pour la 1re	0	
Pour la 2e	$l - 19,5 = 20,1 - 19,5$	$= 0,6$
Pour la 3e	$l + \lambda - 39 = 20,1 + 20,0 - 39$	$= 1,1$
Pour la 4e	$l + \lambda + \lambda' - 58,5 = 20,1 + 20,0 \pm 19,9 - 58,5$	$= 1,5$

Et ainsi de suite : on peut donc construire directement en dessous la courbe CD qui donne l'erreur de calibrage en un point quelconque.

Ce procédé, dû à M. Holman, est expéditif et suffisamment exact ; on dessinera les courbes à grande échelle, de manière à pouvoir lire facilement sur le dessin les longueurs λ.

4. *Deux thermomètres à mercure, construits avec le même verre, ont des réservoirs sphériques de* 7mm *et de* 6mm *de diamètre ; le diamètre intérieur du tube cylindrique du premier égale* 2mm ; *celui du second est de* 1mm. *Dans quel rapport sont*



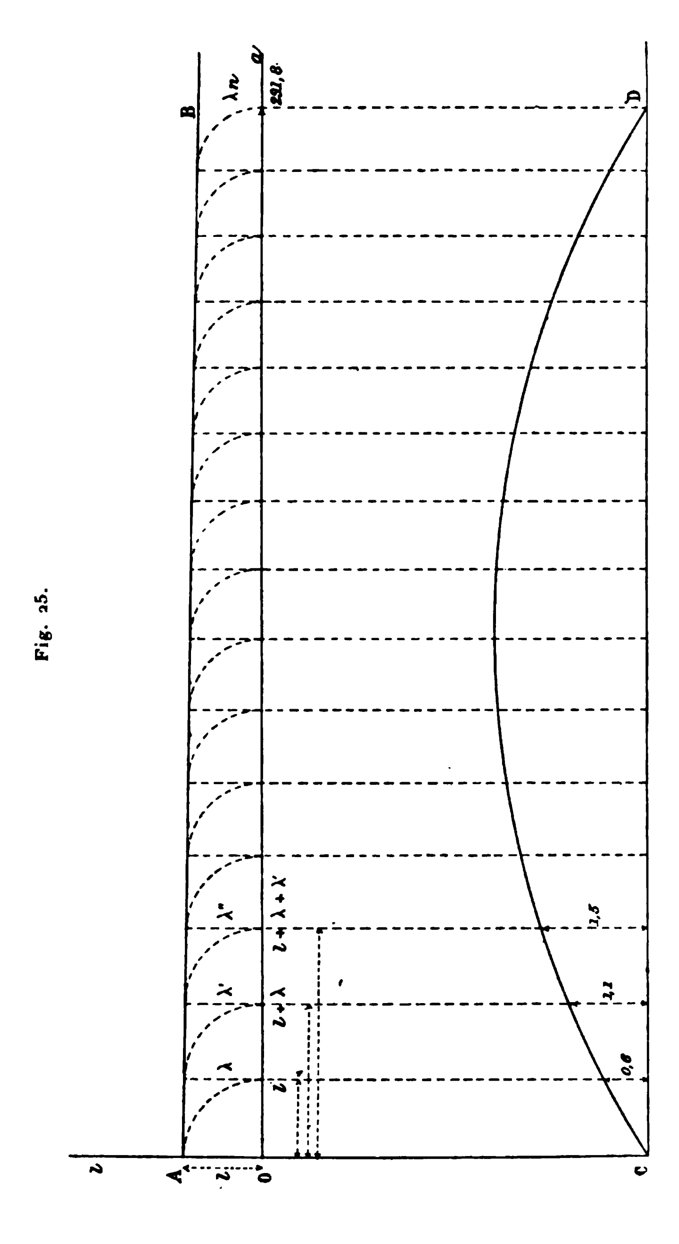


Fig. 25.

les longueurs qui correspondent au degré dans les deux instruments ?

$$\tfrac{1}{6}\pi D^3 \delta = \tfrac{1}{4}\pi d^2 x,$$
$$\tfrac{1}{6}\pi D'^3 \delta = \tfrac{1}{4}\pi d'^2 x';$$
$$\frac{x}{x'} = \frac{D^3}{D'^3}\frac{d'^2}{d^2} = 0,39.$$

5. *On a trouvé qu'un thermomètre à mercure marque* 201°,4 *et* 303°,2 *dans des bains d'huile dont la température exacte, relevée par un thermomètre à air, est de* 200° *et* 300° ; *établir une relation qui permette de déduire les températures vraies de l'observation de ce thermomètre à mercure.*

Appelons x et t les indications des thermomètres à air et à mercure au-dessus du point 100, que nous avons le droit de considérer comme correct pour le thermomètre à mercure, et posons

$$x = at + bt^2.$$

Il vient

$$100,0 = a \times 101,4 + b \times \overline{101,4}^2,$$
$$200,0 = a \times 203,2 + b \times \overline{203,2}^2;$$
$$a = \quad 0,98526,$$
$$b = -0,0000095,$$
$$x = 0,98526\,t - 0,0000095\,t^2.$$

6. *Une horloge, dans laquelle un pendule de fer non compensé bat la seconde, marche exactement à la température zéro ; en été, elle retarde de* 10 *secondes en vingt-quatre heures ; en déduire la température moyenne* θ *de la journée, sachant que le coefficient de dilatation linéaire du fer* $\lambda = 0,118 \times 10^{-4}$.

$$t = 1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$
$$t' = 1 + \rho = \pi\sqrt{\frac{l(1+\lambda\theta)}{g}},$$
$$\theta = \frac{(1+\rho)^2 - 1}{\lambda} = 19°,59.$$

7. *Dulong et Petit ont pris pour valeur moyenne* λ *du coefficient de dilatation linéaire le tiers du coefficient* K *de dilatation cubique, déterminé par la méthode du thermomètre à poids ; quelle est l'erreur e commise ?*

$$1 + \lambda = \sqrt[3]{1 + K},$$
$$e = \frac{K}{3} - \sqrt[3]{1 + K} + 1.$$

Mais

$$(1 + K)^{\frac{1}{3}} = 1 + \tfrac{1}{3}K - \frac{2}{3.6}K^2 + \frac{2.5}{3.6.9}K^3 - \ldots$$

Donc

$$e < \frac{2}{18}K^2 - \frac{5}{81}K^3 < \left(\frac{K}{3}\right)^2.$$

L'erreur est moindre que le carré du tiers de K.

8. *Un thermomètre à poids contient à zéro un poids* P_0 *égal à* 482gr,266 *de mercure ; à* 100°, *il s'en déverse un poids p égal à* 7gr,385 ; *calculer le coefficient de dilatation cubique du verre* K, *entre* 0° *et* 100°.

$$P_0(1 + Kt) = (P - p)(1 + \delta t),$$
$$\delta = 0,1815 \times 10^{-3},$$
$$K = 0,257 \times 10^{-4}.$$

9. *Le réservoir d'un thermomètre à volumes a, jusqu'au zéro marqué sur la tige, une capacité égale à celle de* 28180 *divisions ; le coefficient de dilatation du verre est égal à* $0,265 \times 10^{-4}$. *On le remplit d'acide sulfurique, qui affleure à zéro à la division* 66 *et à* 10°,75 *au trait* 233. *On demande le coefficient de dilatation de ce liquide.*

$$V_0(1 + xt) = V(1 + Kt),$$
$$x = 0,576 \times 10^{-3}.$$

10. *Le volume de l'eau qui occupe à* 4° *l'unité de volume devient, à* t°,

$$V_t = 1 + 8,38 \times 10^{-6}(t - 4)^2 - 3,79 \times 10^{-7}(t - 4)^{2,6}$$
$$+ 2,24 \times 10^{-8}(t - 4)^3.$$



Quel est le coefficient vrai de dilatation de l'eau à t°?

$$(1)\quad \begin{cases} \delta_t = 2 \times 8,38 \times 10^{-6}(t-4) - 2,6 \times 3,79 \times 10^{-7}(t-4)^{1,6} \\ \quad + 3 \times 2,24 \times 10^{-8}(t-4)^2. \end{cases}$$

11. *Un lest de verre éprouve dans un liquide à zéro une perte de poids de p_0 grammes; cette perte est égale à p à $t°$. Le coefficient de dilatation du verre* K *est connu : déterminer le coefficient de dilatation du liquide.*

$$\frac{p_0}{p} = \frac{1 + xt}{1 + Kt}.$$

C'est le procédé employé par Hœllström pour la recherche du maximum de densité de l'eau.

12. *Le coefficient de dilatation de l'alcool K_t à $t°$ est égal à*

$$K_t = 0,104863 \times 10^{-2} + 0,1751 \times 10^{-6} t + 0,1 \times 10^{-9} t^2.$$

Ce liquide a-t-il un maximum de densité?

Non, car la différentielle $\frac{dv}{dt}$, égalée à zéro, donne des racines imaginaires.

13. *Le diamant, qui cristallise dans le système cubique, a un coefficient de dilatation de la forme $a + b(t - 40)$ d'après M. Fizeau; à quelle température correspond son maximum de densité?*

$$a = 0,354 \times 10^{-5},$$

$$b = 0,432 \times 10^{-7}.$$

$$t = \frac{-a + 40b}{b} = -42°,3.$$

14. *Dans quelle direction faudrait-il mesurer le coefficient de dilatation linéaire d'un cristal rhomboédrique pour que le coefficient ainsi déterminé fût le tiers du coefficient de dilatation cubique?*

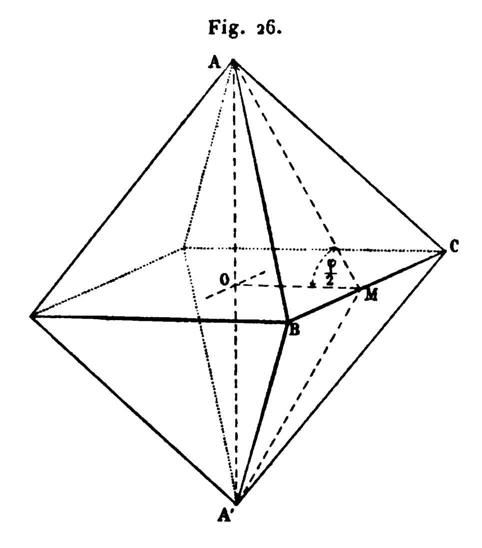
Dans la direction de l'intersection des plans bissecteurs des dièdres compris entre les axes d'élasticité, car on a

(2) $$\cos^2\alpha = \cos^2\beta = \cos^2\gamma = \tfrac{1}{3},$$

$$\delta = \frac{\delta' + \delta'' + \delta'''}{3} = \frac{\Delta}{3} = \frac{\delta' + 2\delta''}{3}.$$

15. *La face* ABC *d'un octaèdre fait un angle* φ *égal à* 67°51′ *avec la face* A′BC *à zéro; quelle sera la grandeur*

Fig. 26.



de cet angle à 100°, *sachant que les coefficients de dilatation linéaire suivant les axes* AO *et* OM *sont respectivement égaux à*

$$0{,}346 \times 10^{-4} \quad \text{et} \quad 0{,}171 \times 10^{-4}\,?$$

$$\frac{AO}{OM} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2},$$

$$\frac{AO(1 + \delta' t)}{OM(1 + \delta'' t)} = \operatorname{tang}\frac{x}{2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{x}{2} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\,\frac{1 + \delta' t}{1 + \delta'' t} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} \times 1{,}001747,$$

$$x = 67^\circ 53' 7''.$$

16. *Mitscherlich et Dulong ont déterminé, par la méthode du thermomètre à poids, le coefficient de dilatation cubique* Δ *du spath, qui est égal à* $0,196 \times 10^{-4}$. *D'autre part, la mesure d'un angle dièdre à zéro et à* $100°$ *leur a donné la valeur de* $\frac{1+\delta' t}{1+\delta'' t} = 1,00342$ (voir le problème précédent). *On demande de déduire de ces deux observations les coefficients de dilatation principaux du spath.*

Notons d'abord que $\delta'' = \delta'''$ dans le spath.

De plus,

$$(1 + \delta'.100) = 1,00342(1 + \delta''.100).$$

Considérons un cube ayant à zéro ses arêtes égales à l_0 : nous aurons

$$v_{100} = l_0^3(1 + \delta'.100)(1 + 2\delta''.100) = l_0^3(1 + \Delta.100),$$
$$l_0^3(1 + \delta''.100)(1 + 2\delta''.100)\,1,00342 = l_0^3(1 + \Delta.100);$$

il vient, par suite,

$$\delta'' = -0,487 \times 10^{-5},$$
$$\delta' = +0,293 \times 10^{-4}.$$

17. *Une face d'un cristal est parallèle à zéro au plan des* xy *et elle a pour équation* $cz = A$; *on demande quel angle* V *cette même face fera à* t *degrés avec le même plan des* xy.

$$A = cz,$$

$$(3) \qquad A = \frac{X}{1+\delta' t} + \frac{Y}{1+\delta'' t} + \frac{cZ}{1+\delta''' t};$$

$$\cos V = \frac{\dfrac{c^2}{1+\delta''' t}}{c\sqrt{\left(\dfrac{1}{1+\delta' t}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{1+\delta'' t}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{1+\delta''' t}\right)^2}}$$

$$= \frac{c}{(1+\delta''' t)\sqrt{\left(\dfrac{1}{1+\delta' t}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{1+\delta'' t}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{1+\delta''' t}\right)^2}}.$$

18. *A quelle condition un cristal reste-t-il semblable à lui-même en se dilatant?*

Pour que les plans de ses faces restent parallèles, il faut que les coefficients des variables soient proportionnels; d'où cette condition

$$1 + \delta t = 1 + \delta'' t = 1 + \delta''' t.$$

Le cristal devra donc appartenir au système cubique.

19. *Quelle est la valeur du coefficient de dilatation des gaz, sous pression constante, $\alpha = \frac{1}{273}$, quand on se sert des échelles de Réaumur et de Fahrenheit?*

Pour chaque degré centigrade d'abaissement de température au-dessous de zéro, la force élastique du gaz diminue de $\frac{1}{273}$ de sa valeur; elle est nulle à -273. La question devient donc la suivante : à quelles températures Réaumur et Fahrenheit la force élastique est-elle nulle?

$$-273\,\text{C} = -218,5 \quad \text{Réaumur},$$
$$-(273 - 17,8)\,\text{C} = -459,36 \quad \text{Fahrenheit},$$

$$\alpha = \frac{1}{273} = \frac{1}{218,5} = \frac{1}{459,4}.$$

20. *Démontrer que, lorsqu'un gaz est plus compressible que ne l'indique la loi de Mariotte, le coefficient de dilatation sous pression constante α est nécessairement plus grand que le coefficient de dilatation sous volume constant α'.*

En effet,

$$v = v_0(1 + \alpha t),$$
$$p = p_0(1 + \alpha' t);$$

d'où

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v}{\frac{1}{\alpha} + t},$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{\frac{1}{\alpha'} + t}.$$

Donc

$$\frac{dv}{dp} = -\frac{v}{p}\,\frac{\frac{1}{\alpha'}+t}{\frac{1}{\alpha}+t}.$$

Or, pour un gaz parfait, suivant la loi de Mariotte, on aurait

$$\left(\frac{dv}{dp}\right) = -\frac{v}{p}.$$

Comparant ces deux effets, nous voyons que, pour une même pression dp,

$$\frac{dv}{(dv)} = \frac{\frac{1}{\alpha'}+t}{\frac{1}{\alpha}+t}.$$

Donc, si dv est plus petit que (dv), variation de volume indiquée par la loi de Mariotte, α est nécessairement plus grand que α'.

21. *La densité de la vapeur de carbone est* 0,422 *et celle du gaz azote* 0,976; *quelle est la densité* δ *du cyanogène* (C^2Az), *formé de* 4C *et de* 2Az *en volumes, avec contraction des deux tiers?*

$$4 \times 0{,}422 + 2 \times 0{,}976 = 3{,}64.$$

Les 6 volumes étant réduits à 2, il vient

$$\delta = \frac{3{,}64}{2} = 1{,}82.$$

22. *Calculer la densité théorique de la vapeur de soufre.*

Soient deux poids P et P′ de gaz occupant, dans les mêmes conditions de température et de pression, les volumes V et V′; nous aurons

$$\frac{P}{P'} = \frac{VD}{V'D'} = \frac{V\delta}{V'\delta'},$$

δ et δ' étant les densités par rapport à l'air. Si nous comparons un gaz quelconque à l'oxygène, de densité $\delta' = 1,1056$, d'équivalent en poids égal à 8, nous aurons $P' = 8$; d'autre part, $\frac{V}{V'}$ sera l'équivalent en volume E du gaz étudié. Il vient donc

$$\frac{P}{8} = E \frac{\delta}{1,1056},$$

d'où

$$\delta = \frac{P \times 1,1056}{8E}.$$

Remplaçons P et E par les équivalents en poids et en volume du soufre, nous aurons sa densité de vapeur

$$\delta = \frac{16 \times 1,1056}{8 \times 1} = 2,2112.$$

23. *Comment varie la densité de la vapeur d'eau saturée, quand la température s'élève?*

On ne peut le savoir *a priori*, parce que la tension croît avec la température; les deux effets sont opposés, attendu que la densité décroît généralement avec la température, tandis qu'elle croît avec la pression.

Pour l'eau, la densité augmente.

En effet, d'après la formule de Duperrey,

$$(7) \quad V = \frac{P}{\delta . 1,293} \frac{760}{F}(1 + \alpha t) = \frac{P}{\delta . 1,293} 100^4 \left(\frac{1}{t^4} + \frac{\alpha}{t^3}\right).$$

Donc V diminue, et la densité augmente avec la température, ce qui est confirmé par l'expérience.

24. *Un tube de Cagniard-Latour est à moitié rempli d'acide sulfureux liquide à zéro; on le chauffe à* 300°. *Quelle est la pression du gaz dans ce tube, sachant que sa densité est*

égale à 2,25 par rapport à l'air et que celle du liquide rapportée à l'eau est de 1,491 ?

$$\frac{V}{2}D = V.0,001293 \times \delta \frac{x}{760} \frac{1}{1+\alpha t},$$
$$x = 380^{m} = 500^{atm}.$$

25. *Dans la chambre vide, de longueur l, d'un baromètre de section s, marquant une pression* **H**, *à t degrés, on introduit p grammes d'eau, quantité insuffisante pour saturer le volume de la chambre ; de quelle hauteur baissera le mercure ?*

$$p = s(l+f)\,1,293\,\delta \frac{f}{760} \frac{1}{1+\alpha t},$$
$$f^2 + fl - p\frac{760(1+\alpha t)}{s.\delta.1,293} = 0.$$

26. *Cinq expériences ont donné la tension* **F** *de la vapeur d'eau aux températures équidistantes* $t_0 = 0$, t_1, t_2, t_3 *et* t_4 ; *en déduire la valeur des constantes a, b, c, α et β de l'équation*

$$\log F = a + b\alpha^t + c\beta^t.$$

Désignons, avec Bravais, par φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4 les valeurs de $\log F$ fournies par l'observation. Nous avons $t_2 = 2t_1$, $t_3 = 3t_1$ et $t_4 = 4t_1$.

Donc

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= a + b + c,\\
\varphi_1 &= a + b\alpha' + c\beta',\\
\varphi_2 &= a + b\alpha'^2 + c\beta'^2,\\
\varphi_3 &= a + b\alpha'^3 + c\beta'^3,\\
\varphi_4 &= a + b\alpha'^4 + c\beta'^4,
\end{aligned}$$

si nous posons $\alpha^{t_1} = \alpha'$ et $\beta^{t_1} = \beta'$.

On en déduit immédiatement les équations suivantes, par soustraction :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 - \varphi_0 &= b(\alpha' - 1) + c(\beta' - 1),\\
\varphi_2 - \varphi_1 &= b(\alpha' - 1)\alpha' + c(\beta' - 1)\beta',\\
\varphi_3 - \varphi_2 &= b(\alpha' - 1)\alpha'^2 + c(\beta' - 1)\beta'^2,\\
\varphi_4 - \varphi_3 &= b(\alpha' - 1)\alpha'^3 + c(\beta' - 1)\beta'^3.
\end{aligned}$$

Écrivons maintenant

$$b(\alpha'-1)=b' \qquad \text{et} \qquad c(\beta'-1)=c'.$$

Les expressions précédentes deviendront

$$\begin{aligned}
\varphi_1-\varphi_0 &= b' + c',\\
\varphi_2-\varphi_1 &= b'\alpha' + c'\beta',\\
\varphi_3-\varphi_2 &= b'\alpha'^2 + c'\beta'^2,\\
\varphi_4-\varphi_3 &= b'\alpha'^3 + c'\beta'^3.
\end{aligned}$$

On en déduit, par une nouvelle soustraction,

$$\begin{aligned}
\varphi_2-\varphi_1-\alpha'(\varphi_1-\varphi_0) &= c'(\beta'-\alpha'),\\
\varphi_3-\varphi_2-\alpha'(\varphi_2-\varphi_1) &= c'(\beta'-\alpha')\beta',\\
\varphi_4-\varphi_3-\alpha'(\varphi_3-\varphi_2) &= c'(\beta'-\alpha')\beta'^2.
\end{aligned}$$

Posons de nouveau

$$c'(\beta'-\alpha')=c''.$$

Il viendra

$$\begin{aligned}
\varphi_2-\varphi_1-\alpha'(\varphi_1-\varphi_0) &= c'',\\
\varphi_3-\varphi_2-\alpha'(\varphi_2-\varphi_1) &= c''\beta',\\
\varphi_4-\varphi_3-\alpha'(\varphi_3-\varphi_2) &= c''\beta'^2.
\end{aligned}$$

On est enfin conduit aux deux équations ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\varphi_3-\varphi_2-\alpha'(\varphi_2-\varphi_1)-\beta'[\varphi_2-\varphi_1-\alpha'(\varphi_1-\varphi_0)] &= 0,\\
\varphi_4-\varphi_3-\alpha'(\varphi_3-\varphi_2)-\beta'[\varphi_3-\varphi_2-\alpha'(\varphi_2-\varphi_1)] &= 0,
\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}
\varphi_3-\varphi_2-(\alpha'+\beta')(\varphi_2-\varphi_1)+\alpha'\beta'(\varphi_1-\varphi_0) &= 0,\\
\varphi_4-\varphi_3-(\alpha'+\beta')(\varphi_3-\varphi_2)+\alpha'\beta'(\varphi_2-\varphi_1) &= 0.
\end{aligned}$$

On en tire $(\alpha'+\beta')$ et $\alpha'\beta'$, dont on fera les coefficients de l'équation du second degré

$$x^2-\mathrm{A}x+\mathrm{B}=0,$$

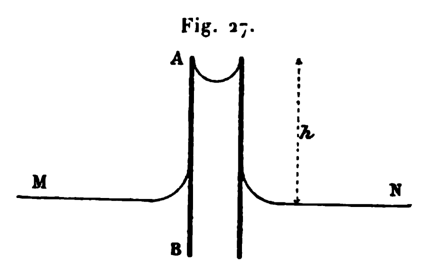
dont α' et β' sont les racines.

On connaît donc α et β, et par suite a, b et c sans difficulté.

27. *Sir William Thomson a démontré que la tension maximum d'un liquide est moindre au contact d'un ménisque que sur une surface terminale plane. Calculer cette différence en dynes, à* 50°, *pour un ménisque de* $0^{cm},001$ *de rayon* R, *sachant que le poids spécifique d du centimètre cube d'eau est égal à* $0^{gr},9881$ *à cette température et que celui de la vapeur d' est, d'après Zeuner, égal à* 0,0008.

Soit un tube capillaire AB, plongé dans l'eau, dans lequel le liquide est soulevé d'une hauteur h au-dessus du niveau MN : négligeons le poids de l'air qui pèse également sur les

Fig. 27.



surfaces libres du liquide, mais appelons p_0 la pression en MN et p celle en A. La différence est évidemment égale au poids de la colonne de vapeur ayant pour section l'unité et pour hauteur la différence des niveaux h:

$$p - p_0 = h\,dg,$$

en unités C.G.S.; or

$$h = \frac{2A}{(d-d')gR},$$

d'où

$$p - p_0 = \frac{d}{d-d'}\,\frac{2A}{R} = 124 \text{ dynes par centimètre carré.}$$

28. *Calculer* $\dfrac{dF}{dt}$ *d'après les Tables de Regnault.*

$$\log F = a + b\alpha^t + c\beta^t,$$
$$\log' F = 2,3026(a + b\alpha^t + c\beta^t),$$
$$\frac{dF}{F} = 2,3026(b\log'\alpha.\alpha^t + c\log'\beta.\beta^t)\,dt$$

ou, en revenant aux logarithmes vulgaires,

$$\frac{dF}{F} = \overline{2,3026}^{2}(b\log\alpha.\alpha^t + c\log\beta.\beta^t)\,dt.$$

Donc

$$\frac{dF}{dt} = F.\overline{2,3026}^{2}(b\alpha^t\log\alpha + c\beta^t\log\beta).$$

CHAPITRE II.

CALORIMÉTRIE.

L'expression de *quantité de chaleur* est empruntée à la théorie du calorique matériel. On échauffait les corps en leur fournissant du calorique, on les refroidissait en leur soustrayant du calorique : le calorique se mesurait, semblait-il, comme on mesure une masse à la balance. Les calorimètres faisaient l'office de cette balance.

Aujourd'hui la notion de fluide est condamnée à disparaître, mais les calorimètres ne seront pas remplacés, car la force vive du mouvement calorifique ne peut être mesurée directement.

On continue donc à mesurer la chaleur en fonction de celle qui est utilisée pour produire un phénomène type : on rapporte les mesures à une unité conventionnelle, la *calorie*, c'est-à-dire à ce qu'il faut de chaleur pour élever 1^{kg} d'eau de 0° à 1°. C'est à ce phénomène que l'on compare les autres.

La quantité de chaleur devient dès lors un nombre caractéristique d'une variation thermique rapportée à un type commun ; le nombre abstrait prend un sens concret.

On égale, par le calorimètre, la quantité de chaleur perdue par un corps à celle qui est gagnée par l'eau qui l'entoure. L'expérience montre qu'il faut des masses inégales et des variations inégales de température du premier corps pour produire un même effet sur l'eau. C'est ainsi qu'a été acquise la notion des *calorifiques spécifiques*. La capacité de l'unité de masse d'eau à zéro a été prise comme unité.

Les dimensions des chaleurs spécifiques sont zéro par rapport à la longueur, à la masse et au temps ; cela étonne de prime abord, mais on le déduit sans peine des considérations

précédentes ; la chaleur spécifique est en effet un rapport, le rapport d'un accroissement de chaleur dans le corps à un accroissement de chaleur dans l'eau : c'est donc un nombre abstrait, indépendant de l'unité de longueur, de masse et de temps, puisqu'il s'agit toujours de masses égales.

Ce que nous venons de dire des chaleurs spécifiques en poids ou en masse est vrai des chaleurs spécifiques en volume ; au lieu de comparer des masses égales ou des poids égaux, on compare des volumes égaux, et la dimension est encore zéro, dans le système C.G.S. comme dans tout autre système.

Pour les gaz, on mesure les chaleurs spécifiques sous pression constante, et on les rapporte aux poids ou aux volumes, en prenant encore l'eau pour type commun. Souvent aussi on les rapporte aux volumes moléculaires, $22^{\text{lit}},32$ à zéro et $0^{\text{m}},76$ de pression.

Les chaleurs spécifiques varient avec la température : ainsi, d'après M. Violle, la chaleur spécifique moyenne du platine entre 0° et 100° est égale à $0,0317 + 0,6 \times 10^{-5}t$ et la chaleur spécifique vraie à $t°$ est égale à $\frac{dq}{dt} = 0,0317 + 0,12 \times 10^{-4}t$.

Pour l'eau, $\frac{dq}{dt} = 1 + 0,4 \times 10^{-4}t + 0,9 \times 10^{-6}t^2$.

La variation est bien plus grande pour les gaz, ainsi que l'ont démontré MM. Berthelot, Mallard et Le Châtelier : ces derniers ont donné les formules suivantes pour la vapeur d'eau, l'acide carbonique, l'oxygène, l'azote, l'oxyde de carbone et l'hydrogène.

$$H^2O^2 = 18, \qquad c = 5,61 + 3,28 \times 10^{-3}t,$$
$$C^2O^4 = 44, \qquad c = 6,3 + 6,0 \times 10^{-3}t - 1,18 \times 10^{-6}t^2,$$
$$O^4, Az^2, C^2O^2, H^2, \qquad c = 4,8 + 6,0 \times 10^{-4}t.$$

Rappelons que ces chiffres sont relatifs aux volumes moléculaires $22^{\text{lit}},32$, à 0° et 760^{mm} de pression.

CONSTANTES NUMÉRIQUES.

Chaleurs spécifiques.

	C.	Poids atomique. π.	Cπ.
Argent	0,05701	107,96	6,15
Bismuth	0,0306	210	6,15
Carbone (diamant)	0.1462	48	7,01
Cuivre	0,0951	63,5	6,04
Fer	0,1138	56	6,37
Mercure	0,0333	200	6,66
Or	0,0322	196,8	6,37
Platine	0,0324	197,6	6,40
Plomb	0,0314	207	6,50
Soufre	0,1776	32,05	5,68
Zinc	0,0955	65	6,21
Maillechort	0,0932	»	»

	C.	δ.	Cδ.
Air	0,2374	1	0,2374
Oxygène	0,2175	1,1056	0,2405
Azote	0,2438	0,9714	0,2369
Hydrogène	3,4090	0,0693	0,2359
Chlore	0,1210	2,47	0,2965
Brome	0,0555	5,54	0,3040

Pouvoirs calorifiques par kilogramme de combustible.

	Calories.	Produit de la combustion.
Hydrogène	34450	HO
Carbone	8080	CO^2
Soufre	2300	SO^2
Zinc	1300	ZnO
Cuivre	600	CuO
Alcool	6900	$4CO^2 + 6HO$

Pouvoirs calorifiques par mètre cube de combustible gazeux à volume constant.

	Calories.	Produit de la combustion.
Hydrogène	34138	HO (vapeur condensée)
Oxyde de carbone	3054	CO^2

	Calories.	Produit de la combustion.
Méthylène........	9551	$2CO^2 + 4HO$ (vapeur condensée)
Éthylène.........	15286	$4CO^2 + 4HO$ »
Gaz d'éclairage...	5250 (¹)	$mCO^2 + nHO$ »

APPLICATIONS.

1. *La chaleur spécifique du fer* C *en poids est égale à* 0,1138 ; *quelle est sa chaleur spécifique en volume* ω?

$$\omega = C.\delta = 0{,}1138 \times 7{,}84 = 0{,}8921.$$

2. *Dulong et Petit ont trouvé, pour le fer, les valeurs moyennes suivantes des chaleurs spécifiques en poids :*

	C.
Entre 0° et 100°.................	0,1098
Entre 0 et 200.................	0,1150
Entre 0 et 300.................	0,1218
Entre 0 et 350.................	0,1255

Calculer une formule qui donne, entre ces limites, les chaleurs spécifiques du fer en fonction des températures.

Cherchons d'abord les quantités de chaleur nécessaires pour élever 1kg de fer de 0° à t° ; nous emploierons une expression de la forme

$$q = at + bt^2 + ct^3.$$

Il vient, d'après les expériences de Dulong et Petit,

$$10{,}98 = a.100 + b.\overline{100}^2 + c.\overline{100}^3,$$

$$23{,}00 = a.200 + b.\overline{200}^2 + c.\overline{200}^3,$$

$$36{,}54 = a.300 + b.\overline{300}^2 + c.\overline{300}^3,$$

(¹) Ce nombre équivaut à 11103 calories par kilogramme.

ou bien

$$0{,}1098 = a + 100b + 10\,000c,$$
$$0{,}2300 = 2a + 400b + 80\,000c,$$
$$0{,}3654 = 3a + 900b + 270\,000c.$$

On en déduit sans peine les valeurs des paramètres a, b et c.

$$a = 0{,}1062,$$
$$b = 0{,}28 \times 10^{-4},$$
$$c = 0{,}8 \times 10^{-7}.$$

Nous aurons donc

$$C = \frac{dq}{dt} = 0{,}1062 + 0{,}56 . 10^{-4} t + 0{,}24 . 10^{-6} t^2.$$

3. *La masse de cuivre rouge d'un pyromètre de Salleron pèse* 106gr; *le calorimètre contient* 500gr *d'eau à* $t°$. *La masse ayant été portée à la température* T, *l'eau prend, après immersion, une température* θ. *Quelle est la valeur en eau de l'appareil et de ses accessoires, sachant que la valeur de* T *est donnée par la formule*

$$T = 50(\theta - t) + \theta.$$
$$PC(T - \theta) = M(\theta - t),$$
$$T = \frac{M}{PC}(\theta - t) + \theta;$$
$$M + 0{,}500 = 50 . PC = 50 \times 0{,}106 \times 0{,}0951.$$
$$M = 0^{kg}{,}004.$$

4. *Déterminer la chaleur spécifique du sulfate de magnésie anhydre par une opération faite sur une solution de ce sel, sachant que* 100gr *de sulfate cristallisé contiennent* 49gr *de sel anhydre et* 51gr *d'eau de cristallisation.*

Dissolvons un poids p de sulfate de magnésie dans un poids d'eau P et portons cette solution à T° : après mélange avec une masse d'eau M (le poids du calorimètre en eau y com-

pris) à une température t, nous observons une température finale θ.

Nous aurons

$$p.0{,}49x(T-\theta)+(p.0{,}51+P)(T-\theta)=M(\theta-t).$$

5. *A quelle température la chaleur spécifique de la vapeur d'eau est-elle maximum?*

$$C=6{,}3+6{,}0\times 10^{-3}t-1{,}18\times 10^{-6}t^2.$$

$$\frac{dC}{dt}=6{,}0\times 10^{-3}-2\times 1{,}18\times 10^{-6}t=0.$$

$$t=2542^\circ.$$

6. *Prenons* 2115^{lit} *de gaz d'éclairage, soit* 1^{kg}, *et additionnons-les de six fois leur volume d'air, soit* 12690^{lit}; *la combustion ayant eu lieu dans une bombe, il se produit* 2739^{lit} *de vapeur d'eau et* 1059^{lit} *d'acide carbonique; il reste* 10025^{lit} *d'azote auxquels il faut joindre* 80^{lit} *d'azote renfermés dans le gaz. En somme, les gaz brûlés sont formés de* 2200^{gr} *d'eau,* 2090^{gr} *d'acide carbonique et* 12591^{gr} *d'azote. Quelle est la température théorique de la combustion?*

A 2000°, les chaleurs spécifiques sont égales à 12,17, 13,58 et 6 pour les trois gaz rapportés aux volumes moléculaires: cela fait en poids 0,677, 0,308 et 0,215.

La somme totale des poids en eau est donc

$$\Sigma pc=2{,}200\times 0{,}677+2{,}090\times 0{,}308+12{,}591\times 0{,}215=4{,}84.$$

A volume constant, la chaleur dégagée $=$ 11103^{cal} par kilogramme, la vapeur d'eau étant condensée; mais nous devons nous placer ici dans l'hypothèse contraire de non-condensation; en prenant pour valeur de la chaleur latente à zéro le nombre 506,5, il y a 1114^{cal} à retrancher de ce chef. Il en reste donc 9989 disponibles.

Si nous appelons T la température inconnue de la combus-



tion, nous aurons dès lors

$$9989 = \Sigma pc\mathrm{T},$$
$$\mathrm{T} = 2064^\circ.$$

C'est par des calculs de ce genre qu'on évalue la température de combustion des combustibles et des gaz tonnants.

7. *Regnault introduisait, dans un calorimètre fermé, un poids* P *de liquide à une température élevée* T; *toute la masse ayant pris cette température, il faisait le vide sur le liquide, de manière à l'évaporer lentement à une température constante t. Le changement d'état et les pertes* R *de toute manière abaissaient la température du liquide de* T *à* θ; *la vapeur formée à la température t, déduite de la pression, se réchauffait, en s'échappant, à la température du calorimètre. Déduire de cette expérience la chaleur latente de vaporisation r,* M *étant le poids en eau du calorimètre et de ses accessoires.*

$$\mathrm{M}(\mathrm{T} - \theta + \mathrm{R}) + \mathrm{PC}(\mathrm{T} - t) = \mathrm{P}r + \mathrm{PC}'\left(\frac{\mathrm{T} + \theta}{2} - t\right).$$

C et C′ sont les chaleurs spécifiques du liquide et de la vapeur. La difficulté de la détermination de t fit renoncer Regnault à ce mode d'expérience, qui présentait d'autre part de grands avantages pour les basses températures.

CHAPITRE III.

RAYONNEMENT ET CONDUCTIBILITÉ.

I. — Rayonnement.

Newton avait admis que la vitesse du refroidissement v dans l'air était proportionnelle à l'excès de la température du corps sur celle du milieu ambiant, et il avait posé

$$(1) \qquad -\frac{d\varepsilon}{dx} = v = a\varepsilon,$$

ε étant l'excès et a un coefficient variable avec la surface rayonnante du corps soumis à l'expérience; ce paramètre a est égal à $\frac{ES}{PC}$, formule dans laquelle E est le pouvoir émissif absolu de la surface, S son aire, P le poids du corps et C sa chaleur spécifique. En intégrant l'équation (1) et exprimant qu'au temps initial x est nul et qu'alors l'excès est égal à ε_0, on obtient la loi suivant laquelle les excès décroissent avec le temps,

$$(2) \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\frac{ES}{PC}x} = \varepsilon_0 e^{-ax}.$$

On en déduit

$$(3) \qquad a = \frac{\log\varepsilon_0 - \log\varepsilon}{x\log e}.$$

A ces formules, Dulong et Petit ont substitué les suivantes :

$$(4) \qquad v = -\frac{d\varepsilon}{dx} = ma^{\theta}(a^{\varepsilon} - 1).$$

Dans cette expression de la vitesse, m est un nombre qui dépend des conditions de l'expérience, a est égal à 1,0077, θ est la température de l'enceinte et ε l'excès de la température du corps sur celle de l'enceinte. Si la température de l'enceinte était zéro, on aurait

$$(5) \qquad v = ma^{\mathrm{T}},$$

T étant la température même du corps rayonnant.

Par intégration, on obtient

$$(6) \qquad x = \frac{1}{ma^{\theta}\log a}\left(\log\frac{a^{\varepsilon}-1}{a^{\varepsilon}}\right) + \mathrm{C};$$

cette équation lie les excès aux temps.

Ce qui précède s'applique au rayonnement seul, dans le vide.

Mais il y a une part de la vitesse de refroidissement qui provient du contact du fluide ambiant; sous la pression normale, cette vitesse v' est donnée par la formule

$$(7) \qquad v' = n\varepsilon^{1,233},$$

dans laquelle n est un nombre qui dépend des conditions de l'expérience et ε l'excès de température, comme ci-dessus.

La nature du gaz et sa pression influent sur le phénomène par la variation de n et par un facteur p^c, dans lequel p est la pression et c un exposant égal à 0,45 pour l'air, 0,517 pour l'acide carbonique et 0,38 pour l'hydrogène.

Telle est la part qui revient à la *convection* du calorique par les mouvements du fluide.

M. Stefan a proposé de substituer à la loi du rayonnement, découverte par Dulong et Petit, cette autre loi : *La quantité de chaleur perdue par rayonnement est proportionnelle à la quatrième puissance de la température absolue, comptée à partir de* — 273°.

$$(8) \qquad v = m\mathrm{T}^4.$$

Pour ce qui est du refroidissement dans les gaz, M. Witz a observé que la formule np^c cessait de correspondre aux faits,

lorsque la pression p dépassait $1^m,200$; l'exposant c croît d'abord et il devient égal à 0,85, dans l'air, sous $1^m,400$ de pression. Cette valeur est alors maximum. Elle diminue ensuite lentement et, à $6^m,400$, elle redevient égale à 0,45. La loi des excès n'est elle-même pas absolument rigoureuse, attendu que les vitesses paraissent croître un peu plus vite que la puissance 1,233 de ε.

En cherchant à déterminer les lois du refroidissement et du réchauffement des gaz, dans un cylindre clos, M. Witz a encore démontré, d'une manière plus certaine, que l'exposant de ε croît avec l'excès et il a adopté la formule

$$v = (\alpha + \beta\varepsilon)\varepsilon, \tag{9}$$

pour exprimer les vitesses. Enfin, les vitesses sont proportionnelles au rapport $\frac{S}{V}$ de la surface des parois de l'enceinte à son volume.

II. — Conductibilité.

Soient x, y et z les coordonnées rectangulaires d'un point pris dans la masse d'un corps isotrope et homogène et U sa température au temps t :

$$U = f(x, y, z, t).$$

Par ce point, menons trois plans parallèles aux plans coordonnés et concevons un parallélépipède infiniment petit construit sur ces trois plans, avec des longueurs d'arête dx, dy, dz; le gain total de chaleur de ce cube sera, K étant le coefficient de conductibilité de la substance,

$$K\,dx\,dy\,dz\left(\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2}\right)dt.$$

On peut l'égaler à

$$CD\,\frac{dU}{dt}\,dt;$$

en appelant C la chaleur spécifique et D le poids spécifique du corps; il vient

$$(10)\qquad \frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}=CD\,\frac{1}{K}\,\frac{dU}{dt}.$$

En régime permanent, $\frac{dU}{dt}=0$, et l'équation se réduit à

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}=0.$$

Faisons

$$U=\varepsilon.$$

L'équation $U=\varepsilon$ est celle d'une surface isotherme, et ε s'appelle le *paramètre thermométrique*.

La chaleur ne peut se propager d'un point à un autre d'une surface isotherme; elle se propage donc normalement à ces surfaces.

Si l'on fait croître le paramètre thermométrique de quantités égales, infiniment petites, $d\varepsilon$, on définit une série de surfaces isothermes infiniment voisines; la série des normales ou la trajectoire orthogonale de ces surfaces est une ligne de propagation du calorique.

En régime permanent, le flux de chaleur qui traverse un élément ds de la surface isotherme $U=\varepsilon$ a pour expression

$$(11)\qquad -K\,ds\,\frac{dU}{dn};$$

pour $dU=\varepsilon$, dn est la portion de normale comprise entre les surfaces $U=\varepsilon$ et $U=\varepsilon+d\varepsilon$. Les flux de chaleur sont donc en raison inverse de dn. Le flux est constant sur toute l'étendue des surfaces isothermes équidistantes.

Ces considérations nous mènent à celles des tubes de propagation du calorique. La section de ces tubes est définie par l'étendue ds traversée par l'unité de chaleur pendant l'unité de temps.

Dans un mur indéfini, les surfaces isothermes sont des plans équidistants parallèles aux faces du mur; les lignes de propa-

gation sont normales à ces plans, et les tubes de propagation sont des cylindres droits.

A et B étant les températures des deux faces du mur et e son épaisseur, la température U d'un plan situé à une distance x du plan A est donnée par l'équation

$$U = A + \frac{A - B}{e} x.$$

La quantité Q de chaleur qui passe, pendant l'unité de temps, à travers une surface S, est égale à

(12) $$Q = KS \frac{A - B}{e}.$$

On en déduit

(13) $$K = \frac{Q}{A - B} \frac{e}{S}.$$

L'unité de chaleur étant celle qui élève de zéro à 1° l'unité de volume de l'eau, les dimensions de K sont $\frac{L^2}{T}$.

Pour une barre de dimensions transversales restreintes, il y a lieu de tenir compte de la déperdition latérale : si p est son périmètre, S sa section, x la distance d'un point considéré à l'origine et u son excès de température sur le milieu ambiant, h le coefficient de conductibilité extérieure, on a

$$KS \frac{d^2 u}{dx^2} dx = hpu\, dx,$$

ou, en posant $a^2 = \frac{hp}{KS}$,

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = a^2 u,$$

équation dont l'intégrale générale est de la forme

(14) $$u = Me^{ax} + Ne^{-ax}.$$

Lorsque la barre est assez longue pour que la température

de son extrémité soit égale à celle du milieu ambiant, l'équation devient

$$(15)\qquad u = \mathrm{U}e^{-ax},$$

U étant la température de l'extrémité chauffée de la barre.

On démontre sans peine que, pour une série de points distants de i, on a

$$(16)\qquad \frac{u_{x-i} + u_{x+i}}{u_x} = e^{ai} + e^{-ai} = 2n.$$

Pour deux barres identiques, à la substance près,

$$(17)\qquad \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'} = \frac{\log^2(n' + \sqrt{n'^2 - 1})}{\log^2(n + \sqrt{n^2 - 1})}.$$

CONSTANTES NUMÉRIQUES.

Conductibilités absolues rapportées au centimètre et à la seconde exprimées en calories-grammes.

Argent	82	Plomb	7
Cuivre	66	Bismuth	1,5
Laiton	20	Marbre	0,3
Zinc	16	Verre	0,01
Fer	9,8	Caoutchouc	0,0015

Conductibilité de l'air	$0,5 \times 10^{-4}$
Conductibilité de l'hydrogène	$0,34 + 10^{-3}$

APPLICATIONS.

1. *Deux corps sont à la même température, mais leurs vitesses de refroidissement sont inégales; leurs excès de température respectifs sont donnés par les formules $\varepsilon = \varepsilon_0\mu^{-x}$ et $\varepsilon_0\mu'^{-x}$, dans lesquelles ε_0 est l'excès initial et x le temps; au bout de quel temps la différence de leurs températures sera-t-elle maximum, si on les place dans un même milieu à température constante?*

$$\delta = \varepsilon_0(\mu^{-x} - \mu'^{-x}).$$

Faisons

$$\frac{d\delta}{dx} = 0.$$

Il vient

$$x = \frac{\log(\log'\mu') - \log(\log'\mu)}{\log\mu' - \log\mu}.$$

2. *Le P. Secchi a relevé, à Rome, un excès de température de* 12°,06 *dans son actinomètre, dont la température constante égalait* 50°. *Calculer la température du Soleil, par application des lois de Newton, de Dulong et Petit et de Stefan.*

1° La loi de Newton donne

$$x = \varepsilon \frac{360°}{32'3'',6} = \varepsilon . 183960 = 12{,}06 \times 183960 = 2218558°.$$

2° Par application de la formule de Dulong et Petit, nous aurons

$$a^x = (a^{62,06} - a^{50}) \frac{360}{32'3'',6} = (1{,}0077^{62,06} - 1{,}0077^{50}) 183960\,;$$

$$a^x = 26122, \qquad x = 1326°.$$

3° La formule de Stefan donne

$$x^4 = (\overline{335{,}06}^4 - \overline{323}^4) 183960, \qquad x = 3937°.$$

Quel est le temps X *nécessaire pour qu'un gaz passe d'un excès* ε_2 *à un excès* ε_1, *dans une enceinte dans laquelle sa vitesse de refroidissement a été trouvée égale à* $(\alpha + \beta\varepsilon)\varepsilon$?

$$v = -\frac{d\varepsilon}{dx} = (\alpha + \beta\varepsilon)\varepsilon,$$

$$X = \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon}{(\alpha + \beta\varepsilon)\varepsilon}.$$

Posons

$$\frac{1}{(\alpha + \beta\varepsilon)\varepsilon} = \frac{1}{\beta\left(\frac{\alpha}{\beta} + \varepsilon\right)\varepsilon} = \frac{a}{\beta\varepsilon} + \frac{b}{\frac{\alpha}{\beta} + \varepsilon}.$$

Déterminons a et b de manière que cette relation ait lieu pour toute valeur de ε; faisons donc successivement

$$\varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Nous aurons

$$1 = a\left(\frac{\alpha}{\beta} + \varepsilon\right) + b(\beta\varepsilon);$$

$$\varepsilon = 0, \qquad a\frac{\alpha}{\beta} = 1, \qquad a = \frac{\beta}{\alpha};$$

$$\varepsilon = -\frac{\alpha}{\beta}, \qquad -b\alpha = 1, \qquad b = -\frac{1}{\alpha}.$$

Donc

$$\frac{d\varepsilon}{(\alpha+\beta\varepsilon)\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{\alpha\varepsilon} - \frac{d\varepsilon}{\alpha\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{d\varepsilon}{\varepsilon+\frac{\alpha}{\beta}}\right),$$

$$\int \frac{d\varepsilon}{(\alpha+\beta\varepsilon)\varepsilon} = \frac{1}{\alpha}\left[\log'\varepsilon - \log'\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{\beta}\right)\right];$$

d'où

$$X = \frac{1}{\alpha \log e}\left[\log\varepsilon_1 - \log\varepsilon_2 - \log\left(\varepsilon_1+\frac{\alpha}{\beta}\right) + \log\left(\varepsilon_2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha\log e}\log\frac{\varepsilon_1\left(\varepsilon_2+\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\varepsilon_2\left(\varepsilon_1+\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{1}{\alpha\log e}\log\frac{\varepsilon_1(\alpha+\beta\varepsilon_2)}{\varepsilon_2(\alpha+\beta\varepsilon_1)}.$$

4. *Un vase de métal est à une température x qu'on veut mesurer exactement ; on y verse un poids* P *d'eau à zéro ; au bout d'un temps* T_1, *cette eau a pris une température* θ'; *au bout du temps* $2T_1$, *cette température est devenue* θ'', *la température de l'air ambiant étant* t. *On demande la température initiale du métal, en tenant compte du refroidissement.*

Soit v la vitesse du refroidissement par minute et unité d'excès.

$$-v(x-t)\,dT = d\theta,$$

$$-v\,dT = \frac{d\theta}{\theta - x},$$

$$vT_1 = \log' \frac{x-t}{\theta - t},$$

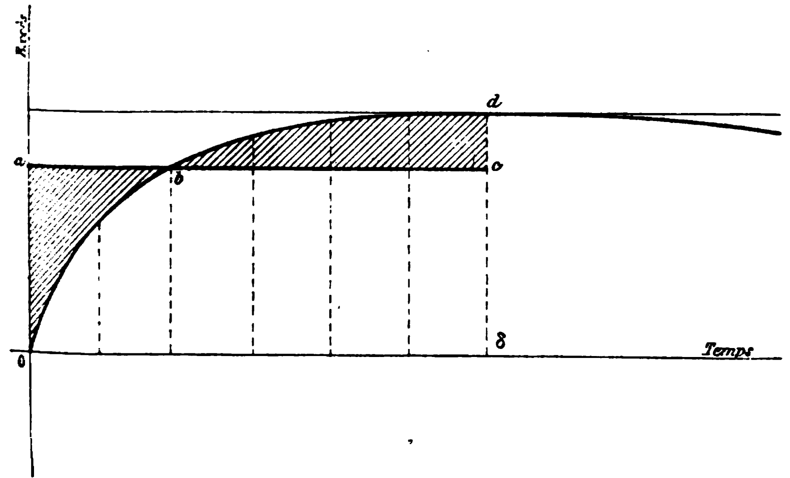
$$vT_1 = \log' \frac{\theta' - t}{\theta'' - t},$$

$$x - t = \frac{(\theta' - t)^2}{\theta'' - t}.$$

5. *Comment pourrait-on appliquer, d'une manière rationnelle, la méthode de compensation de Rumford?*

Relevons de cinq en cinq secondes l'état des températures d'un calorimètre, après immersion du corps chaud, et construisons la courbe *obd* (*fig.* 28) en portant les excès en or-

Fig. 28.



donnée et les temps en abscisse. Menons la droite *abc* parallèle à l'axe des temps, de manière que l'aire *oab* soit

égale à l'aire *bcd*; les pertes par refroidissement, étant fonction des excès et des temps, sont proportionnelles à ces aires, ainsi que les gains par réchauffement; il s'établirait donc une compensation rigoureuse entre les pertes et les gains, si la température initiale avait correspondu à l'excès $c\delta$.

La question n'admet, il est vrai, qu'une solution empirique, par la difficulté d'évaluation des aires; nous conseillons l'emploi d'un papier quadrillé, qui permet d'évaluer les surfaces par une numération de carrés. On peut encore découper ces courbes dans du papier fort et les peser.

Notre *fig.* 28 montre qu'il y aurait avantage à prendre de l'eau à une température inférieure à celle du milieu ambiant d'une quantité égale à $\frac{3\theta}{4}$, θ étant l'élévation de température $d\delta$ produite par l'immersion du corps chaud.

6. *Un calorimètre de laiton poli, de pouvoir émissif absolu égal à* E, *présentant sur le milieu ambiant un excès* ε, *est placé au centre d'un vase de laiton de même forme; la paroi d'air immobilisée entre les deux surfaces protège le calorimètre contre les déperditions. Évaluer le bénéfice procuré par ce dispositif, fréquemment employé, sachant que les deux surfaces sont* S *et* S'.

Soit ε' l'excès de température du calorimètre extérieur sur l'air; le vase central perd $E(\varepsilon-\varepsilon')S$; la surface extérieure perd $E(\varepsilon')S'$.

$$S(\varepsilon-\varepsilon')=S'\varepsilon',$$

$$\varepsilon'=\varepsilon\frac{S}{S+S'}.$$

Le vase perdait $ES\varepsilon$; il perd maintenant $E\frac{SS'\varepsilon}{S+S'}$, quantité moindre.

La perte est diminuée dans le rapport de 1 à $\frac{S'}{S+S'}$.

Péclet a vérifié l'exactitude de cette formule.

7. *Deux barres métalliques argentées, de même section et de même périmètre, sont parvenues à un état thermique per-*



manent ; elles présentent en trois points équidistants les excès

$$t_1 = 15^\circ{,}1, \qquad t_2 = 12^\circ{,}8, \qquad t_3 = 10^\circ{,}7;$$
$$t'_1 = 17^\circ{,}8, \qquad t'_2 = 13^\circ{,}9, \qquad t'_3 = 10^\circ{,}6.$$

On demande le rapport des coefficients de conductibilité des deux métaux.

(16) $$2n = \frac{t_1 + t_3}{t_2} = 2{,}015,$$
$$2n' = \frac{t'_1 + t'_3}{t'_2} = 2{,}043;$$

(17) $$\frac{K}{K'} = 2{,}5.$$

8. *Dans un appareil d'Ingenhouz, la cire a fondu sur l'argent sur* $10^{cm}{,}5$ *de longueur ; sur le fer, la fusion s'est produite jusqu'à* $4^{cm}{,}0$; *quelle est la conductibilité du fer, celle de l'argent étant égale à* 100 ?

(15) $$U e^{-al} = U e^{-a'l'},$$
$$\frac{l^2}{l'^2} = \frac{K}{K'},$$
$$K = 13.$$

9. *Forbes chauffe une longue barre métallique par une de ses extrémités et il détermine par l'observation la relation* $u = f(x)$ *qui lie les excès u aux distances x à l'origine de la barre ; il trouve* $u = U e^{-mx}$. *La section de la barre est* S *et h le coefficient de conductibilité extérieure. Déduire de cette observation la valeur du coefficient de conductibilité intérieure* K *au point x et ses variations avec la température.*

La quantité de chaleur qui traverse une section située à une distance x de l'origine est $-KS\dfrac{du}{dx}$; il se perd par la surface extérieure de la barre, comprise entre ce point et l'ex-

trémité l, $\int_x^l hpu\,dx$, p étant le périmètre extérieur. Il vient donc

$$\text{KS}\frac{du}{dx} + hp\int_x^l u\,dx = 0,$$

$$-\text{KS}m\text{U}e^{-mx} + \frac{hp}{m}(\text{U}e^{-ml} - \text{U}e^{-mx}) = 0.$$

On en déduit K en fonction de x : Forbes a trouvé que le coefficient de conductibilité a une valeur particulière en chaque point et qu'il varie rapidement avec la température.

CHAPITRE IV.

THERMODYNAMIQUE.

La Thermodynamique repose sur deux principes :

1° *Principe de l'équivalence de Mayer et Joule.*

Toutes les fois qu'un corps produit ou subit un travail, il disparaît de la chaleur ou bien il en apparaît ; et il existe un rapport unique et constant entre les quantités de travail et de chaleur qui dépendent les unes des autres dans ces phénomènes.

$$\mathfrak{T} = JQ \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{1}{J}\mathfrak{T} = A\mathfrak{T}.$$

425^{kg} (ou $4,17 \times 10^{10}$ ergs) équivalent à 1^{cal} : $J = 425$.
1^{kgm} équivaut à $\frac{1}{425}$ de calorie : $A = \frac{1}{425}$.

2° *Principe de Carnot.*

Lorsqu'un corps est mis successivement en communication avec deux sources de chaleur supérieure et inférieure indéfinies, et qu'il parcourt le cycle de Carnot, le rapport de la quantité de chaleur fournie par la source supérieure à celle qui est cédée par la source inférieure est indépendant de la nature du corps et ne dépend que de la température absolue des sources (¹).

(¹) Les températures absolues, que nous écrirons T, sont égales aux températures centigrades augmentées de $\frac{1}{\alpha}$; en réalité, $\frac{1}{\alpha} = 271,4$, mais on admet 273.

Les formules suivantes sont la traduction analytique de ces deux principes :

$$dQ = dU + Ap\,dv. \tag{1}$$

U est la *chaleur interne*, c'est-à-dire la somme des quantités de chaleur absorbées par le travail d'oscillation, pour élever la température, et par le travail de disgrégation, pour produire le travail intérieur correspondant : en un mot, U est le prix du travail intérieur.

U est une fonction de p et de v ;

$$dU = \frac{dU}{dv}dv + \frac{dU}{dp}dp + \frac{dU}{dt}dt. \tag{1 bis}$$

Q n'est au contraire aucune fonction de p et de v.

Le premier principe nous conduit à des équations qui expriment les quantités de chaleur nécessaires pour une transformation. On aura, par exemple,

$$dQ = \frac{dU}{dp}dp + \frac{dU}{dv}dv + Ap\,dv, \tag{1 ter}$$

si t reste constant.

En prenant deux variables indépendantes, v et t, pour définir l'état du corps, on déduit de l'équation (1)

$$dQ = c\,dt + l\,dv : \tag{2}$$

c est la *chaleur spécifique sous volume constant* et l la *chaleur latente de dilatation*.

$$c = \frac{dU}{dt}, \qquad l = \frac{dU}{dv} + Ap. \tag{3}$$

$$\frac{dl}{dt} - \frac{dc}{dv} = A\frac{dp}{dt}. \tag{4}$$

En prenant p et t pour variables

$$dQ = C\,dt + h\,dp : \tag{5}$$

C est la *chaleur spécifique sous pression constante* et h la *chaleur latente d'augmentation de pression.*

(6) $$C = \frac{dU}{dt} + Ap\frac{dv}{dt}, \qquad h = \frac{dU}{dp} + Ap\frac{dv}{dp}.$$

(7) $$\frac{dh}{dt} - \frac{dC}{dp} = -A\frac{dv}{dt}.$$

Enfin, avec p et v comme variables,

(8) $$dQ = K\,dp + \lambda\,dv.$$

(9) $$K = \frac{dU}{dp}, \qquad \lambda = \frac{dU}{dv} + Ap.$$
$$\frac{d\lambda}{dp} - \frac{dK}{dv} = A.$$

On déduit encore de ces équations

(10) $$C = c + l\frac{dv}{dt},$$

(11) $$h = l\frac{dv}{dt}.$$

Nous trouvons aussi une nouvelle expression de dQ :

(12) $$dQ = C\left(\frac{dt}{dp}\right)dp + c\left(\frac{dt}{dv}\right)dv.$$

Les trois coefficients $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dv}{dp}$ présentent un grand intérêt pour le physicien.

Le premier $\frac{dv}{dt}$ est égal à $v_0\alpha$, α étant le coefficient de dilatation sous pression constante.

Le second $\frac{dp}{dt}$ est égal à $p_0\alpha'$, α' étant le coefficient de dilatation sous volume constant.

Le troisième $\frac{dv}{dp}$ est égal à $-v_0\mu$, μ étant le *coefficient de compressibilité* à température constante.

Or nous pouvons écrire

$$\frac{dv}{dp} = - \frac{\frac{dt}{dp}}{\frac{dt}{dv}} = - \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{dp}{dt}},$$

d'où

(13) $$v_0 \mu = \frac{v_0 \alpha}{p_0 \alpha'}$$

et

$$\alpha = p_0 \alpha' \mu.$$

On aura encore

(14) $$C - c = l \alpha v_0,$$

$$h = - l v_0 \mu.$$

Toutes ces équations se rapportent à l'unité de poids des corps, et l'unité choisie est le kilogramme ; p est la pression en kilogrammes par mètre carré et v le volume spécifique du kilogramme, c'est-à-dire l'inverse du poids spécifique exprimé en kilogrammes par mètre cube.

Le second principe n'est pas moins fécond que le premier : Clapeyron, en considérant des cycles infiniment petits dans une dimension, a institué une méthode nouvelle qui permet d'étudier tous les changements d'état physique.

L'énoncé le plus général du principe de Carnot est le suivant : *Le travail* $\mathfrak{T}$ *accompli dans un cycle de Carnot est égal à* $(Q - q) f(T - t)$, $Q - q$ *étant la chaleur mise en œuvre et* f *une fonction des températures du foyer et du réfrigérant ; cette fonction est la même pour tous les corps.* Or on a évidemment

$$\frac{A \mathfrak{T}}{Q} = \frac{Q - q}{Q} = \rho.$$

Le rendement ρ est cette fonction des températures identique pour tous les corps.

On a obtenu cette fonction pour les gaz parfaits.

$$\frac{Q - q}{Q} = \rho = \frac{T - t}{T}.$$

Pour un cycle de Clapeyron, $\rho = \frac{dT}{T}$. En étudiant de la sorte les changements de volume, on trouve une nouvelle expression de l :

$$l = AT\frac{dp}{dt},$$

d'où

$$(15) \qquad dQ = c\,dt + AT\frac{dp}{dt}dv.$$

De l'équation du rendement, on déduit avec Clausius

$$\frac{Q}{T} = \frac{q}{t} \qquad \text{ou} \qquad \frac{Q}{T} - \frac{q}{t} = 0.$$

Ce savant a été conduit ainsi à un nouvel énoncé du théorème : lorsqu'un corps quelconque parcourt un cycle de Carnot, on a

$$(16) \qquad \int \frac{dQ}{T} = 0,$$

dQ désignant la quantité de chaleur versée sur le corps pendant un changement infiniment petit et T la température absolue à laquelle ce changement s'accomplit.

Ce théorème est vrai pour tout cycle réversible.

Un cycle est *réversible* lorsque toutes les opérations qui le constituent sont réversibles : il suffit qu'une seule ne le soit pas pour qu'il devienne irréversible.

Une transformation est réversible lorsque le corps qui la subit n'a pas de vitesse sensible pendant la transformation ; ou encore, lorsque sa température et sa pression ne diffèrent de celle du milieu que par un infiniment petit.

Si l'on donne les valeurs extrêmes de p et de v qui définissent l'état thermique d'un corps, l'intégrale $\int \frac{dQ}{T}$ est une fonction déterminée de ces valeurs extrêmes des variables et elle est indépendante des états intermédiaires et du chemin parcouru. En prenant donc cette intégrale à partir d'une

origine convenue, elle est une fonction des coordonnées de p et de v à l'état final.

Posons $\int \frac{dQ}{T} = S$; il viendra

$$\frac{dQ}{T} = dS. \tag{17}$$

L'expression différentielle $\frac{dQ}{T}$ est donc intégrable.

La fonction S a reçu le nom d'*entropie :* elle joue un rôle considérable dans la Thermodynamique.

Voici quelques-unes de ses propriétés : l'entropie est pour chaque corps une fonction spécifique de l'état de ce corps ; dans les mêmes conditions de température et de pression, elle caractérise la nature du corps et elle spécifie les diverses substances ; pour une même substance, elle est proportionnelle au poids.

Prenons deux corps à la même température et supposons qu'une quantité infiniment petite de chaleur passe de l'un sur l'autre ; la diminution d'entropie du premier est alors égale, en valeur absolue, à l'augmentation d'entropie du second, et l'entropie totale reste constante. Il n'en serait plus de même si les deux corps étaient à des températures différentes ; dans ce cas, la chaleur passerait d'elle-même du corps chaud au corps froid ; la diminution d'entropie du premier serait inférieure, en valeur absolue, à l'augmentation d'entropie du second ; dans ces circonstances, l'entropie totale croît.

L'entropie totale augmente donc par la libre communication de la chaleur entre les corps d'un système : elle atteint sa valeur maximum lorsque tous les éléments du système sont à la même température.

Les lignes adiabatiques sont isentropiques, car dS est proportionnel à dQ ; dS est donc nul et par suite S est constant, quand la transformation est adiabatique.

M. Massieu a démontré, en 1877, que l'entropie n'est pas indépendante de la chaleur interne, attendu qu'on peut tirer S et U d'une fonction unique H à laquelle il a donné le nom

de *fonction caractéristique*. Voici comment cette fonction est définie :

$$dQ = dU + Ap\,dv = T\,dS.$$

Ajoutons $S\,dT$ aux deux membres de l'équation, il vient

$$dU + Ap\,dv + S\,dT = d(TS),$$

ou encore

$$S\,dT + Ap\,dv = d(TS - U).$$

Le second membre de cette équation est une différentielle exacte ; il en est donc de même du premier et nous aurons

$$(18) \qquad d(TS - U) = dH = S\,dT + Ap\,dv\,;$$

H est la fonction caractéristique du corps.

On déduit de cette dernière équation

$$(18\ bis) \qquad S = \frac{dH}{dT},$$

et

$$(18\ ter) \qquad U = T\frac{dH}{dT} - H.$$

I. — Étude des gaz.

Les lois de Mariotte et Gay-Lussac nous donnent

$$\frac{pv}{1 + \alpha t} = p_0 v_0,$$

d'où

$$pv = p_0 v_0 \alpha (273 + t) = RT.$$

Les valeurs de la constante R sont données dans le Tableau ci-après, dans lequel nous avons réuni les principaux coefficients physiques des gaz.

GAZ.	POIDS spécifiques D.	VOLUMES spécifiques $v = \frac{1}{D}$.	COEFFICIENTS DE DILATATION		CHALEURS SPÉCIFIQUES		R.
			α à pression constante.	α' à volume constant.	C à pression constante.	c à volume constant.	
Air........................	kg 1,293	mc 0,7733	$0,3670 \times 10^{-2}$	$0,3665 \times 10^{-2}$	0,2374	0,1680	29,27
Oxygène..................	1,430	0,6993	Inconnu	Inconnu	0,2182	0,1560	26,47
Hydrogène................	0,0896	11,1608	$0,3661^{-2} \times 10^{-2}$	$0,3667^{-2} \times 10^{-2}$	3,4090	2,4150	422,98
Acide carbonique..........	1,977	0,5603	$0,3710^{-2} \times 10^{-2}$	$0,3688^{-2} \times 10^{-2}$	0,2169	0,1719	19,14
Protoxyde d'azote........	1,968	0,5087	$0,3719\ ^{2} \times 10^{-2}$	$0,3667^{-2} \times 10^{-2}$	0,2262	0.1810	19,25

Il ressort des expériences de Joule et de Thomson que le changement de volume, sans travail extérieur, d'un gaz parfait, n'entraîne aucune variation de température : la chaleur interne U ne dépend donc que de la température des gaz parfaits.

On est conduit ainsi aux relations suivantes :

$$l = Ap, \tag{19}$$

$$C - c = Ap_0 v_0 \alpha = AR, \tag{20}$$

$$\frac{C - c}{v_0} = Ap_0 \alpha, \tag{21}$$

$$\frac{C}{c} = 1 + A\frac{p_0 v_0 \alpha}{c} = \gamma. \tag{22}$$

Voici les valeurs de $\frac{C}{c} = \gamma$ pour divers gaz :

Gaz.	Air.	O.	Az.	H.	AzH^3.	CO^2.	AzO.	C^4H^4.	SO^2.
γ....	1,41	1,41	1,41	1,41	1,33	1,29	1,28	1,26	1,26

Remarquons que γ varie avec la température et la pression : mais, de 0° à 100° et de $0^m,400$ à $1^m,800$ de pression, cette variation est négligeable.

Il est utile de calculer à l'avance quelques valeurs des puissances $\gamma - 1 = 0,41$ et $\frac{\gamma - 1}{\gamma} = 0,29$.

	Puissances					
	1.	2.	3.	4.	5.	6.
$X^{\gamma-1}$...............	1	1,33	1,57	1,77	1,93	2,08
$X^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$...............	1	1,22	1,37	1,50	1,60	1,68

L'échauffement d'un gaz de t à T, sous volume constant, exige $Q = c(T - t)$ calories ; sous pression constante, il faut

$$Q = C(T - t).$$

La loi qui exprime la variation de la pression, en fonction du volume, dans une détente *isothermique*, est $pv = RT$; le

travail entre des volumes v_0 et v_1, ou des pressions p_1 et p_0, est égal à

(23) $$\mathfrak{T}_{v_0}^{v_1} = \mathrm{RT} \log' \frac{v_1}{v_0} = \mathrm{RT} \log' \frac{p_0}{p_1}.$$

La loi d'une détente *adiabatique* est

(24) $$pv^\gamma = p_1 v_1^\gamma.$$

Le travail développé dans cette opération est

(25) $$\mathfrak{T}_{v_0}^{v_1} = \mathrm{RT}_0 \frac{1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{v_0}{v_1} \right)^{\gamma - 1} \right],$$

ou encore

(26) $$\mathfrak{T}_{v_0}^{v_1} = \mathrm{RT}_0 \frac{1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right].$$

Considérons le cas où un gaz s'écoulerait d'un réservoir dans lequel la pression et le volume spécifique garderaient des valeurs constantes p_0 et v_0 ; admettons que le gaz pénètre avec une vitesse w dans un second réservoir dont la pression p_0 resterait aussi constante. Si le gaz pouvait être considéré comme incompressible, on aurait, pour la vitesse d'écoulement, $w = \sqrt{2gh}$, h étant la charge. A température constante, la vitesse prendrait une valeur

(27) $$w^2 = 2g\mathrm{RT}_0 \log' \frac{p_0}{p_1}.$$

Sans addition ni perte de chaleur, il faut écrire

(28) $$w^2 = 2g\mathrm{RT}_0 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right].$$

C'est la formule qu'il convient d'appliquer le plus généralement; elle est connue sous le nom de *formule de Weisbach* ou de *Zeuner* et on l'écrit quelquefois sous la forme

$$w^2 = a^2 \frac{2}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right],$$

en désignant par a la vitesse normale du son dans l'air à la pression p_0 ; en effet, $a^2 = g\gamma p_0 v_0 = g\gamma RT_0$.

M. Clausius a proposé, à la suite de Bernoulli, Joule et Krönig, une théorie cinétique dont nous ne rappellerons que les principales conclusions.

Un gaz est caractérisé : 1° par la nature de ses molécules, d'où dépend sa constitution chimique ; 2° par leur moyenne de libre parcours l, fonction de la pression, et 3° par leur vitesse moyenne de translation u, qui varie avec la température.

Deux propositions importantes ont pu être démontrées : 1° *la force vive moyenne de translation des molécules d'une masse gazeuse est proportionnelle à la température absolue* T *de cette masse.*

En effet,

$$(29) \qquad u = u_0 \sqrt{\frac{T}{273}}.$$

Donc

$$\tfrac{1}{2} mu^2 = KT.$$

2° *Le produit pv de la pression du gaz par le volume spécifique est égal aux $\frac{2}{3}$ de cette force vive, étendue à toutes les molécules de nombre n.*

$$(30) \qquad pv = \tfrac{2}{3}\,\tfrac{1}{2}\,nmu^2 = \tfrac{1}{3}\,nmu^2 = p_0 v_0 \alpha T.$$

Ces propositions entraînent comme corollaires les lois de Mariotte, de Gay-Lussac, d'Ampère et d'Avogadro, la loi du mélange des gaz, celle de Dulong et Petit, etc., et elles conduisent à la connaissance des éléments invisibles des masses gazeuses. Le Tableau suivant donne quelques-uns de ces résultats :

	Air.	Oxygène.	Hydrogène.
Vitesse moyenne...........	485^m	461^m	1848^m
Moyenne de libre parcours.	$0^{cm},955.10^{-5}$	$1^{cm},059.10^{-5}$	$1^{cm},855.10^{-5}$
Nombre de chocs par seconde.	4700.10^6	4065.10^6	9480.10^6

Pour tous les gaz, le nombre des molécules et leur écartement moyen sont identiques : à zéro et 760^{mm}, il y a 20 trillions de molécules par centimètre cube de gaz et leur écarte-

ment moyen est de $\frac{3}{1000000}$ de millimètre. Il faut 10 trillions de molécules d'air et 140 trillions de molécules d'hydrogène pour faire 1^{mgr}.

Reconnaissons que la théorie cinétique est absolument hypothétique : un grand nombre de savants, séduits par la portée de ses déductions, l'ont admise sans objection, mais d'autres, parmi lesquels M. Hirn, la repoussent énergiquement. Cette théorie a néanmoins été introduite dans l'enseignement classique, à cause de la généralisation qu'elle apporte dès maintenant dans les phénomènes présentés par les fluides.

N'omettons pas de faire observer que le mouvement de translation seul est insuffisant pour expliquer les propriétés des gaz : il est nécessaire d'ajouter à la force vive de translation K un autre terme pour représenter la force vive totale des gaz H.

La force vive de translation est le *viriel extérieur,* d'après le théorème de M. Clausius sur le mouvement stationnaire; le *viriel intérieur* est le terme qu'il faut ajouter à K pour exprimer correctement la force vive totale H.

On démontre d'ailleurs facilement que

$$\frac{K}{H} = 0{,}63. \tag{31}$$

APPLICATIONS.

1. *Du mercure, tombant d'une hauteur de* $2^m,225$, *s'échauffe de* $0°,1573$ *d'après MM. Cantoni et Gerosa ; déduire de cette expérience la valeur de* J, *en prenant pour la capacité calorifique du mercure le nombre* 0,03337.

$$J = \frac{PH}{PCt} = 423{,}82.$$

2. *Le piston d'un cylindre de* $0^{mq},0003688$ *de section étant chargé de* 167^{kg}, *dans une expérience de M. Hirn, l'eau qui*

s'écoulait sous cette charge gagnait 1°,0457 ; *calculer d'après ces données la valeur de* J.

La pression par mètre carré est $\frac{167}{0,0003688}$, soit 452819kg,9; d'où, en l'exprimant en hauteur d'eau,

$$J = \frac{452,8199}{1,0457} = 433.$$

3. *Avec quelle vitesse une balle de plomb doit-elle frapper un obstacle pour être fondue par le choc, en supposant que toute l'énergie cinétique qu'elle possède soit transformée en chaleur sans aucune déperdition? La chaleur latente de fusion du plomb* λ *est égale à* 5,7; *sa chaleur spécifique* C *est* 0,0314; *la température de l'air t égale* 15°; *le plomb fond à* 320°.

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}w^2 = J[PC(T-t) + P.\lambda],$$
$$w = 361^{m}.$$

4. *La Terre a une masse de* 5 *sextillions de tonnes, et une vitesse de translation de* 30km *à la seconde : sa chaleur spécifique moyenne étant égale à* 0,03, *on demande quelle serait l'élévation de température de la Terre si elle était brusquement arrêtée dans sa course.*

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}w^2 = JPCT,$$
$$T = 3597769°.$$

5. *En se combinant au chlore, l'hydrogène dégage par équivalent, estimé en grammes,* 23000 *calories-grammes : quelle est en ergs l'énergie équivalente ?*

$$\mathfrak{T} = 9,6 \times 10^{11} \text{ ergs}.$$

6. *Calculer* J *par* R, C *et* γ *pour l'air.*

$$\gamma = \frac{C}{c} = \frac{C}{C - \frac{R}{J}}, \qquad (20)$$

d'où

$$J = \frac{R}{C - \frac{C}{\gamma}} = \frac{R}{C - c},$$

$$J = 423.$$

7. *Calculer la valeur qu'il faut théoriquement assigner à la chaleur spécifique de l'eau, sous volume constant.*

(14) $$C - c = l\frac{dv}{dt} = l\alpha v_0.$$

Mais nous avons, d'autre part,

(13 et 15) $$l = AT\frac{dp}{dt} = ATp_0\alpha' = AT\frac{\alpha}{\mu};$$

d'où

$$C - c = ATv_0\frac{\alpha^2}{\mu},$$

$$c = C - ATv_0\frac{\alpha^2}{\mu}.$$

La valeur du terme soustractif est extrêmement faible à zéro; elle est égale à moins de 0,002; à 4°, elle est absolument négligeable. Mais à 100°, on a trouvé que $\frac{C}{c} = 1,14$.

8. *Calculer la quantité de chaleur employée à dilater le cuivre, quand on l'échauffe de 1°, sachant que le coefficient de dilatation α de ce métal est égal à $0,515 \times 10^{-4}$ et que son coefficient de compressibilité μ est égal à $0,1013 \times 10^{-3}$ en kilogrammes par centimètre carré.*

1^{dmc} de cuivre pèse 9^{kg} et sa chaleur spécifique est égale à $0,95 \times 10^{-1}$.

Pour élever de 1° la température de cette masse, il faut dépenser $9 \times 0,95 \times 10^{-1} = 0^{cal},855$; l'allongement d'une arête

du cube est $\frac{0,1 \times 0,515 \times 10^{-4}}{3} = 0,172 \times 10^{-5}$; la force qui produirait ce phénomène à froid serait de 5084^{kg} et le travail de $0^{kgm},087$.

La chaleur correspondante égale $0^{cal},2 \times 10^{-3}$.

C'est le $\frac{1}{4325}$ de la chaleur mise en œuvre.

9. *Joule comprimait à* $26^{kg},2$ *par centimètre carré de l'huile de baleine prise à* $16°,27$; *sa densité* D_0 *était* $0,915$ *à zéro, sa chaleur spécifique* C *atteignait* $0,53$ *à* $16°$ *et son coefficient de dilatation* α *fut trouvé égal à* $0,76 \times 10^{-3}$. *Calculer l'élévation de température produite par cette compression.*

En admettant qu'il n'y eût ni perte, ni gain de chaleur, on pourrait écrire

(5) $$C\,dT + h\,dp = 0.$$

Pour des variations finies ΔT et Δp, on aurait

(11) et (14) $$h = -C\frac{\Delta T}{\Delta p} = l\frac{dv}{dp} = -lv_0\mu,$$

(13) $$l = \frac{C}{v_0\mu}\frac{\Delta T}{\Delta p} = AT\frac{\alpha}{\mu},$$

$$\Delta T = \Delta p\frac{AT\alpha}{C}v_0 = \Delta p\frac{AT\alpha}{CD_0}$$
$$= \frac{26,2 \times 10^4 \times (273 + 16,27)0,76 \times 10^{-3}}{425 \times 0,53 \times 0,915 \times 10^3} = 0°,279.$$

Joule a observé un accroissement de $0°,263$; l'erreur est moindre que le $\frac{1}{18}$.

10. *Une tige métallique a-t-elle le même coefficient de dilatation alors qu'elle est soumise à une traction énergique que lorsqu'elle est à l'état naturel?*

Nous répondrons, avec M. Potier, que l'effet de la traction est d'augmenter le coefficient de dilatation.

En effet, la longueur l de la tige est une fonction de la température et de la pression.

$$l = f(t.p),$$
$$\frac{dl}{l_0} = \alpha\, dt + \varepsilon\, dp\,;$$

α est le coefficient de dilatation thermique à pression constante et ε le coefficient d'élasticité, égal au quotient du poids π agissant sur l'unité de section par l'allongement de l'unité de longueur : c'est l'inverse du coefficient de compressibilité linéaire; l_0 est la longueur initiale.

On a donc

$$\frac{dl}{dt} = \alpha\, l_0 \qquad \frac{dl}{dp} = \varepsilon\, l_0$$

et

$$\frac{d^2 l}{l_0\, dp\, dt} = \frac{d\alpha}{dp} = \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Or, augmentons la traction d'une quantité finie Δp : le coefficient de dilatation augmentera de $\Delta p \frac{d\varepsilon}{dt}$; mais nous avons aussi un allongement Δl, que nous pouvons calculer :

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon\, \Delta p.$$

Il vient par conséquent, pour α, une variation $\Delta\alpha$

$$\Delta\alpha = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta l}{l_0} \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Le coefficient de dilatation varie donc comme celui d'élasticité, lequel augmente avec la température ; il augmente donc lui-même.

11. *Calculer la variation d'entropie de* 1^{kg} *d'eau, que l'on chauffe de* 0° *à* 100°.

L'entropie augmente avec la température :

$$\frac{dQ}{T} = C\frac{dT}{T},$$

$$S - S_0 = \int_{T_0}^{T_1} \frac{dQ}{T} = C \log' \frac{T_1}{T_0} = C \log' \frac{373}{273}.$$

Admettons que C reste égal à l'unité ; nous aurons

$$S - S_0 = 1,297.$$

12. *On connaît la constante* R *d'un gaz : quel est le poids du mètre cube à une température* T *et sous une pression* p ?

$$\frac{1}{v} = D = \frac{p}{RT}.$$

13. *Calculer la variation de la chaleur interne de* 1^{kg} *d'air passant de* 10° *à* 20°C.

(3) $$U_{10}^{20} = \int_{10}^{20} c\, dT = c \times 10 = 1,68.$$

14. 1^{mc} *d'acide carbonique, à* 20°C. *et sous la pression de l'atmosphère, se refroidit jusqu'à zéro et son volume devient égal à* 0^{mc},932, *sous la même pression ; de combien son entropie a-t-elle diminué ?*

1^{mc} d'acide carbonique à 20° et 0^m,760 de pression pèse 1^{kg},843.

Nous avons

$$dQ = c\, dT + Ap\, dv = c\, dT + AR\frac{dv}{v}.$$

Donc il vient

$$S - S_0 = -\int_{v}^{v_0}\int_{T}^{T_0} \frac{dQ}{T} = -\left[c \log' \frac{T}{T_0} + AR \log' \frac{v}{v_0}\right]$$

$$= -1,843\left[0,172 \times \log' \frac{293}{273} + \frac{19,14}{425}\log' \frac{1000}{932}\right]$$

$$= -0,028.$$

15. *Dire quel est le nombre maximum de calories que puisse céder par refroidissement 1^mc d'air non comprimé, pris sous la pression atmosphérique, quelle que soit la température à laquelle il soit porté.*

A zéro et $0^m,760$, 1^{mc} d'air pèse $1^{kg},293$; son poids décroît à mesure que la température s'élève : soit π ce poids. En refroidissant ce mètre cube de T_1 à T_0, on lui enlève, sous pression constante, $\pi(T_1 - T_0)C$ calories : nous disons que ce calorique est limité.

En effet, nous avons

$$(18) \qquad \begin{aligned} pv_1 &= \pi R T_1, \\ pv_0 &= \pi R T_0, \\ \pi(T_1 - T_0)C &= \frac{p}{R}(v_1 - v_0)C. \end{aligned}$$

Or $v_1 = 1$; donc $v_1 - v_0 \leqq 1$.

Le maximum égale donc

$$\frac{p}{R}C = \frac{10333}{29,27} \times 0,2374 = 83^{cal},6.$$

Cette ingénieuse démonstration est de M. Marcel Deprez.

16. *Existe-t-il un calorique spécifique absolu, c'est-à-dire une quantité de chaleur servant uniquement à produire la chaleur sensible, sans contribuer ni au travail interne, ni au travail externe ?*

La demande est de M. Bertrand.

En général, on ne saurait mesurer ce calorique. « La prétention de le faire rappelle, dit M. Bertrand, ce personnage de l'antiquité, qui, s'étant engagé à boire la mer et n'ayant rien promis pour les fleuves, exigea qu'avant l'épreuve on les empêchât d'y verser leurs eaux. Cependant d'illustres physiciens parlent d'un calorique absolu et le définissent, mais sans le mesurer et sans en faire usage. »

C'est M. Clausius qui a introduit dans la Science la considération du calorique absolu : il admet qu'il est indépendant

de l'état physique des corps ; ce n'est qu'une opinion qu'il est permis de ne point partager.

Voici comment on peut le concevoir. La chaleur interne se compose de deux parties : il y a la chaleur consommée par le travail interne et la chaleur réellement existante dans le corps. Cette dernière seule intervient dans la définition du calorique absolu.

On ne peut donc songer à mesurer le calorique absolu, parce que l'évaluation du travail interne devrait être faite d'abord, et que cette grandeur nous échappe entièrement.

Mais, pour les gaz parfaits, le travail interne est nul, et le calorique absolu est égal à la chaleur spécifique sous volume constant.

17. *Démontrer que le produit $c\pi$ de la chaleur spécifique des gaz à volume constant par leur poids atomique est égal à* $\dfrac{c}{C-c}$.

En effet, le rapport $\dfrac{C-c}{v_0}$ est égal, pour tous les gaz, à 0,089; le même nombre exprime le poids spécifique de l'hydrogène D_h.

Il vient donc

$$C - c = v_0 D_h = \frac{D_h}{D},$$

$$\frac{1}{C-c} = \pi,$$

$$\frac{c}{C-c} = c\pi.$$

18. *La chaleur spécifique, sous pression constante, du protoxyde d'azote est égale à 0,2238; calculer sa chaleur spécifique sous volume constant.*

$$R = \frac{10333}{273 \times 1,968} = 19,25,$$
$$c = C - AR = 0,1785.$$

Sous une autre forme, on aurait aussi

$$c = C - \frac{10333}{425 \times 273 \times D} = C - \frac{0,089}{D}.$$

19. *Les vitesses du son dans l'air et dans l'acide carbonique sont dans le rapport de* 0,7786 *à* 1; *en déduire* $\frac{C'}{c'} = \gamma'$ *pour l'acide carbonique.*

$$\frac{V_{air}}{V_{CO^2}} = 0,7786.$$

Or

$$V = \sqrt{\frac{p_0 g}{D} \gamma (1 + \alpha t)}.$$

Toutes choses égales d'ailleurs, nous aurons

$$\frac{V^2}{V'^2} = \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{D'}{D},$$

d'où

$$\gamma' = \gamma \frac{V'^2 D'}{V^2 D} = 1,41 \times \overline{0,7786}^2 \times 1,529 = 1,306.$$

20. *Un cylindre contient un volume v de gaz à la pression* $H + h$ *et à la température t; on le fait détendre brusquement dans une atmosphère de pression* H, *ce qui augmente son volume et abaisse sa température; mais la paroi intervient rapidement pour le ramener, sous volume constant, à sa température initiale, sous la pression* $H + h'$: *déduire γ de la mesure de h, h' et* H.

Soit v_1 le volume après la détente adiabatique.

$$\left(\frac{v}{v_1}\right)^\gamma = \frac{H}{H + h},$$

$$v(H + h) = v_1 (H + h'),$$

$$\left(\frac{H + h'}{H + h}\right)^\gamma = \frac{H}{H + h},$$

$$\gamma = \frac{\log H - \log(H + h)}{\log(H + h') - \log(H + h)}.$$

21. *Un gaz a un volume v et une température t à la pression* H; *on le comprime et sa pression devient* $(H+h)$ *à une température inconnue* $(t+x)$, *son volume étant* $(V-v)$; *la paroi le ramène à la température* t, *sous volume constant. Déduire de cette expérience la valeur de* γ, *par la seule observation des pressions.*

$$\frac{VH}{1+\alpha t} = \frac{(V-v)(H+h)}{1+\alpha(t+x)} = \frac{(V-v)(H+h')}{1+\alpha t},$$

$$x = \frac{h-h'}{H+h'}\,\frac{1+\alpha t}{\alpha},$$

$$\frac{v}{V} = \frac{h'}{H+h'}.$$

Or

$$\frac{C}{c} = \gamma = 1+m,$$

m étant l'élévation de température produite par une compression $\frac{\alpha}{1+\alpha t}$, dans l'expérience de Clément et Desormes; donc

$$\frac{m}{\frac{\alpha}{1+\alpha t}} = \frac{x}{\frac{h'}{H+h'}}$$

et

$$m = \frac{h-h'}{H+h'}\,\frac{1+\alpha t}{\alpha}\,\frac{\alpha}{1+\alpha t}\,\frac{H+h'}{h'} = \frac{h-h'}{h'}$$

et

$$\gamma = \frac{C}{c} = \frac{h}{h'}.$$

22. *Déterminer la valeur théorique du rapport* γ *entre les chaleurs spécifiques pour les gaz monoatomiques.*

Soit H la demi-force vive totale de l'unité de masse d'un gaz et K la demi-force vive du mouvement de translation.

Pour un échauffement à volume constant, on a

$$dH = cJ\,dT.$$

Faisons l'intégration entre les limites T et $T_0 = 0$, il vient

$$H = cJT = \frac{cTpv}{T(C-c)} = \frac{pvc}{C-c}.$$

Or

(30) $$K = \frac{nmu^2}{2} = \frac{3}{2}pv,$$

d'où

$$\frac{K}{H} = \frac{3}{2}\left(\frac{C}{c} - 1\right)$$

et

$$\frac{C}{c} = \gamma = 1 + \frac{2}{3}\frac{K}{H}.$$

Pour un gaz parfait dont la molécule serait monoatomique, $\frac{K}{H} = 1$ et

$$\gamma = 1,666.$$

C'est le cas de la vapeur de mercure.

23. *On chauffe 1^{kg} d'acide carbonique de zéro à 20°, sous pression constante; quel est le travail extérieur produit?*

$$\mathfrak{C} = p(v - v_0) = R(T - T_0) = 392^{kgm},80.$$

24. *Quelle est la quantité de chaleur nécessaire pour entretenir à T_0 la température d'un corps dont le volume augmente de dv?*

(15) $$dQ = AT\frac{dp}{dt}dv.$$

25. *Le travail que peut produire par sa détente un kilogramme de gaz est infini, si l'on maintient sa température constante.*

En effet,

$$\mathcal{E} = \int_{v_0}^{v_1} p\,dv = \mathrm{RT} \log \frac{v_1}{v_0};$$

or v_1 peut croître indéfiniment : donc aussi le travail $\mathcal{E}$.

26. *On fait détendre* 1^mc *d'air de* 10^atm *à* 1^atm, *à la température constante de* 20°; *calculer le travail disponible et déterminer l'influence de la nature du gaz et de sa température dans ce phénomène.*

Dans les applications de ce genre, il faut toujours se rappeler que les formules se rapportent au poids de 1^kg et que v exprime le volume spécifique du kilogramme. Voici les calculs détaillés auxquels donne lieu ce problème très simple, mais qu'on traite souvent d'une manière incorrecte.

Nous avons

$$(23) \qquad \mathcal{E}_{p_1}^{p_2} = p_1 v_1 \log' \frac{p_2}{p_1} = \mathrm{RT} \log' \frac{p_2}{p_1}.$$

Appliquons d'abord la première équation.

Le poids de 1^mc d'air à 20° C., sous la pression de 10^atm, égale

$$1,293 \times 10 \times \frac{1}{1+\alpha t} = \frac{1,293 \times 10 \times 273}{\mathrm{T}}.$$

D'autre part,

$$v_1 = \frac{v_0}{273}\mathrm{T} = \frac{1}{1,293 \times 273}\mathrm{T}.$$

Il vient donc, en tenant compte du poids de l'air détendu,

$$\mathcal{E}_{p_1}^{p_2} = \frac{1,293 \times 10 \times 273}{\mathrm{T}} \frac{10333\,\mathrm{T}}{1,293 \times 273} \log' \frac{p_2}{p_1}$$
$$= 10333 \times 10 \times \log' \frac{p_2}{p_1} = 237928^{\mathrm{kgm}}.$$

La seconde formule donne de même

$$\mathfrak{E}_{p_1}^{p_2} = \frac{1,293 \times 10 \times 273}{T} \text{RT} \log' \frac{p_2}{p_1}$$

$$= \frac{1,273 \times 10 \times 273}{T} \frac{10333}{273 \times 1,293} \log' \frac{p_2}{p_1}$$

$$= 10333 \times 10 \times \log' \frac{p_2}{p_1} = 237928^{\text{kgm}}.$$

On obtient donc immédiatement l'expression du travail en estimant en mètres cubes le volume du gaz après détente et en le multipliant par sa pression initiale p et par $\log' \frac{p_2}{p_1}$; c'est la règle pratique.

On voit que le travail est indépendant de la nature du gaz et de sa température; ce résultat, que les formules ne mettent pas directement en évidence, pouvait néanmoins être affirmé *a priori*, car $\mathfrak{E} = \int p\, dv$.

27. *Calculer le travail produit dans une détente adiabatique de* 4^{mc} *d'air, pris à la température de* $25°$, *partant de* 5^{atm} *et tombant à la pression atmosphérique.*

$$(26) \quad \mathfrak{E}_{p_1}^{p_2} = \frac{p_1 v_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] = \frac{\text{RT}_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right].$$

Le poids des 4^{mc} d'air, à 5^{atm} et $25°$, est égal à

$$\frac{4 \times 1,293 \times 5 \times 273}{T};$$

il vient donc

$$\mathfrak{E}_{p_1}^{p_2} = \frac{4 \times 1,293 \times 5 \times 273}{0,41 \times T} \frac{10333 \times T}{1,293 \times 273}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$$

$$= \frac{4 \times 5 \times 10333}{0,41}\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{0,29}\right] = 189032^{\text{kgm}}.$$

Nous voyons encore qu'il a fallu multiplier le volume ini-

tial par la pression initiale : nous procéderons ainsi désormais.

28. *On comprime* 125^{lit} *d'acide carbonique dans le récipient d'une pompe de Natterer, ayant une capacité de* 500^{cc}; *combien fondra-t-il de glace dans le vase réfrigérant qui l'entoure?*

La chaleur dégagée est égale à

$$(23)\quad Q = A p_0 v_0 \log' \frac{v_0}{v_1} = \frac{1}{425} \times 10333 \times 0,125 \log' 250 = 16^{cal},7.$$

En prenant pour la chaleur de fusion de la glace 80^{cal}, nous aurons, pour le poids p de la glace fondue,

$$p = \frac{16,7}{80} = 209^{gr}.$$

29. *Une perforatrice Sommelier consomme par heure* 60^{mc} *d'air à* 6^{atm}; *combien faudra-t-il fournir de calories au cylindre pour le maintenir à une température constante de* 10° *et quel est dans ces conditions le travail disponible?*

$$\mathfrak{T} = 666592^{kgm}.$$

La puissance développée égale $2^{chx},46$ de 75^{kgm}.
La quantité de chaleur à fournir est de 1568^{cal}.

30. *On décuple le volume d'une masse d'air par une transformation adiabatique; que devient la pression?*

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{\gamma}.$$

La pression passe de 1 à 0,039; en détente isothermique elle ne serait descendue qu'à 0,100.

31. *Le travail que peut produire un gaz, qui se détend sans perte ni gain de chaleur, est proportionnel à sa température absolue.*

En effet,

$$(19) \qquad dQ = c\,dT + l\,dv = c\,dT + A\,p\,dv,$$

$$dQ = c\,dT + \frac{C-c}{R}\,p\,dv = 0.$$

Entre les limites T_0 et T_1,

$$c(T_1 - T_0) + \frac{C-c}{R}\int p\,dv = 0,$$

$$\int p\,dv = \frac{cR}{C-c}(T_1 - T_0).$$

Le travail est donc proportionnel à $T_1 - T_0$.
Si $T_0 = 0$,

$$\int p\,dv = KT_1.$$

32. *Dans une expérience de M. Cailletet, l'air passe subitement de* 300^{atm} *à* 1^{atm}; *quel est l'abaissement de température produit par cette détente, en admettant que le tube de verre, entouré de glace, ne réchauffe pas le gaz pendant la durée infiniment petite de la détente ?*

$$pv^\gamma = p_1 v_1^\gamma,$$

$$\frac{pv}{T} = \frac{p_1 v_1}{T_1},$$

$$v^{\gamma-1} T = v_1^{\gamma-1} T_1,$$

$$\frac{T_1}{T} = \left(\frac{v}{v_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}};$$

$$T_1 = 52^\circ \text{ absolus} = -221^\circ\,\text{C}.$$

33. *Un briquet à air est fait de verre, que nous supposerons ne pas conduire la chaleur ; on demande s'il faudrait déve-*

lopper moins de travail dans un briquet de métal, bon conducteur de la chaleur, pour réduire une masse d'air au $\frac{1}{1000}$ de son volume.

Dans le verre, la compression est supposée adiabatique.

(25) $$\mathfrak{T} = \frac{RT}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{v_0}{v}\right)^{\gamma - 1} - 1\right].$$

Dans le métal, on peut admettre que la compression soit isothermique :

(23) $$\mathfrak{T}' = RT \log' \frac{v_0}{v}.$$

Or nous trouvons que

$$\frac{1}{\gamma - 1}[(1000)^{\gamma - 1} - 1] = 39{,}00,$$
$$\log' 1000 = 6{,}9078.$$

Le travail de compression est donc près de 5,6 fois plus considérable dans le verre : l'élévation de température est égale à

$$T\left(\frac{v_0}{v}\right)^{\gamma - 1} = 4630 - 273 = 4357^\circ \text{C}.$$

Il est vrai de dire qu'on n'arrive pas dans la pratique à la compression au millième.

34. *Un réservoir contenant de l'hydrogène, à 2^{atm} de pression et à 0° C., est brusquement ouvert et le gaz tombe instantanément à la pression de l'atmosphère ; quel est le poids spécifique du gaz immédiatement après la détente ?*

$$\frac{p_1}{D_1^\gamma} = \frac{p_2}{D_2^\gamma},$$
$$D_2 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} D_1$$
$$= 0{,}1096.$$

35. *On comprime 1^{kg} d'hydrogène, pris sous la pression de l'atmosphère, et on le réduit à un volume dix fois moindre, en le maintenant, par soustraction de calorique, à une température constante égale à 25° : déterminer le nombre de calories à retirer au gaz, et dire si l'on serait arrivé au même résultat en comprimant d'abord le gaz, sans le refroidir, et en l'amenant ensuite à la température de 25°.*

Dans le premier cas, il fallait soustraire au gaz

$$Q = \text{ART} \log' \frac{v_1}{v_0} = 683^{cal}.$$

Dans la seconde hypothèse, la compression eût d'abord élevé sa température à

$$x = 298(10)^{\gamma-1} = 766° \text{ absolus} = 493°\text{C}.$$

Or, pour ramener ce gaz de 493° à 25°, il y aurait eu à lui soutirer

$$(493 - 25)c = 468 \times 2{,}415 = 1130^{cal}.$$

Le résultat final est donc tout différent.

36. *On comprime brusquement un volume v_1 d'air ; si la transformation est rigoureusement adiabatique, le volume ne pourra être amené à une valeur v_2 moindre que $\frac{v_1}{3{,}44}$.*

Cette curieuse observation est de M. Ritter.

Soit un cylindre, ayant une section égale à l'unité de surface ; en abaissant instantanément un piston P, du niveau h_1 au niveau h_2 (*fig.* 29), la pression passe de p_1 à p_2, et le volume décroît de $v_1 = h_1$ à $v_2 = h_2$: en même temps, la température du gaz, qui était T_1, devient égale à T_2.

Supposons que le poids de l'air soit de 1^{kg}.

Nous pouvons écrire que l'équivalent en chaleur du travail dépensé est employé à échauffer le gaz de T_1 à T_2.

$$c(T_2 - T_1) = Ap_2(v_1 - v_2) = Ap_2(h_1 - h_2),$$

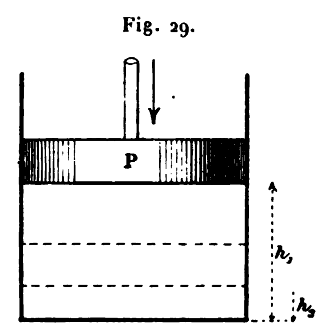
$$p_2 v_2 = RT_2 = p_2 h_2,$$

$$\frac{cp_2 h_2}{R} - cT_1 = Ap_2(h_1 - h_2) ;$$

d'où

$$p_2 = \frac{c\mathrm{RT}_1}{ch_2 - \mathrm{AR}h_1 + \mathrm{AR}h_2}.$$

Fig. 29.



Mais p_2 devient égal à l'infini pour

$$ch_2 + \mathrm{AR}h_2 = \mathrm{AR}h_1.$$

On en déduit

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{c}{\mathrm{AR}} + 1 = \frac{0,168 \times 425}{29,27} + 1 = 3,44.$$

Donc

$$h_2 = \frac{h_1}{3,44} \qquad \text{et} \qquad v_2 = \frac{v_1}{3,44}.$$

C'est la plus petite valeur du volume ; elle correspond à une pression infinie.

37. *Comment peut-on, dans les problèmes de compression et de détente, tenir compte de la vapeur d'eau renfermée dans les gaz?*

Les calculs sont corrects si l'on prend pour α la valeur $\frac{1}{250} = 0,004$; pour l'air humide, R devient alors égal à 31,964. Ainsi l'on aurait

$$pv = 31,964 \times (t + 250).$$

38. *Donner l'équation d'une détente d'un gaz avec une addition ou une soustraction quelconque de chaleur,* $\pm dQ$.

(2 et 19) $$\pm dQ = c\,dT + Ap\,dv = c\,dT + ART\frac{dv}{v}.$$

Mais

$$\frac{pv}{T} = \frac{p_0 v_0}{T_0} \quad \text{et} \quad v = \frac{p_0 v_0}{p}\frac{T}{T_0};$$

$$dv = \frac{p_0 v_0}{T_0}\left(\frac{dT}{p} - \frac{T\,dp}{p^2}\right),$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dT}{T} - \frac{dp}{p};$$

$$\pm dQ = c\,dT + ART\left(\frac{dT}{T} - \frac{dp}{p}\right) = C\,dT - ART\frac{dp}{p}.$$

39. *Trouver les valeurs de* $\frac{dp}{dv}$ *dans les détentes isothermiques et adiabatiques.*

$$1^\circ \quad pv = \text{const},$$

$$p\,dv + v\,dp = 0,$$

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{p}{v};$$

$$2^\circ \quad pv^\gamma = \text{const},$$

$$\frac{dp}{dv} = -\gamma\frac{p}{v}.$$

40. *Démontrer que* $dQ = \dfrac{cv\,dp + Cp\,dv}{R}$.

(1 *bis*) $$dQ = \frac{dU}{dp}dp + \left(\frac{dU}{dv} + Ap\right)dv.$$

(3 et 6) $$dQ = c\frac{dT}{dp}dp + C\frac{dT}{dv}dv.$$

Or

$$pv = RT,$$

$$\frac{dT}{dp} = \frac{v\,dp}{R}, \qquad \frac{dT}{dv} = \frac{p\,dv}{R}.$$

Donc

$$dQ = c\frac{v}{R}dp + C\frac{p}{R}dv.$$

41. *Démontrer directement l'égalité* $l = AT\frac{dp}{dT}$.

(1) $$\frac{dl}{dT} - \frac{dc}{dv} = A\frac{dp}{dT},$$

(2) $$dQ = c\,dT + l\,dv,$$

$$\frac{dQ}{T} = c\frac{dT}{T} + l\frac{dv}{T}.$$

Mais nous savons que $\frac{dQ}{T}$ est une différentielle exacte; son intégrale n'est autre chose que l'entropie.

Donc

$$\frac{1}{T}\frac{dc}{dv} = \frac{1}{T}\frac{dl}{dT} - \frac{l}{T^2}.$$

On en déduit, par comparaison des deux équations,

$$l = AT\frac{dp}{dT}.$$

42. *Calculer* $\frac{dS}{dp}$ *et* $\frac{dS}{dv}$, S *étant l'entropie.*

(3 et 6) $$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\left(c\frac{dT}{dp}dp + C\frac{dT}{dv}dv\right).$$

On a par suite

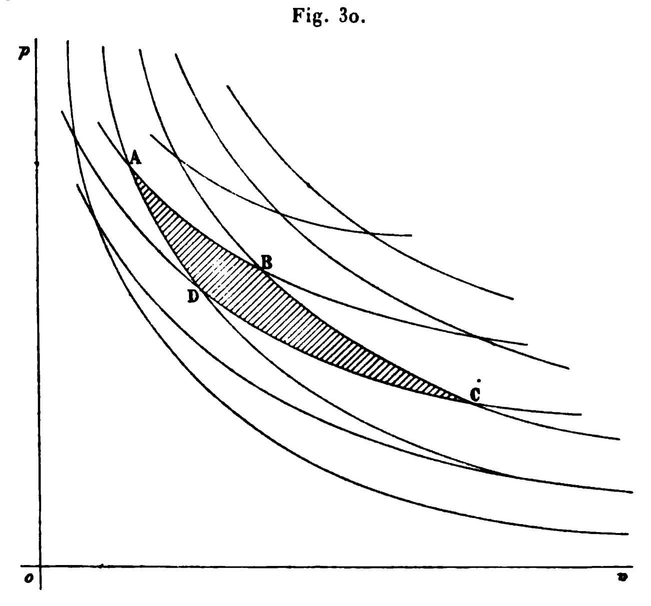
$$\frac{dS}{dp} = \frac{c}{T}\frac{dT}{dp},$$

$$\frac{dS}{dv} = \frac{C}{T}\frac{dT}{dv}.$$

43. *Démontrer que les séries d'isothermes et d'adiabatiques, correspondant à des accroissements égaux du paramètre*

constant, forment des parallélogrammes d'égale surface (*fig.* 30).

Fig. 30.



Les équations générales des isothermes et des adiabatiques sont

$$T = \alpha, \qquad S = \beta.$$

T est la fonction de la pression et du volume qui représente la température, S est la fonction de la pression et du volume qui exprime l'entropie : α et β sont des paramètres caractéristiques de ces lignes. En donnant à α et β des accroissements égaux $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$, on obtient toute la série des lignes isothermes et adiabatiques ; les parallélogrammes formés par leurs intersections sont des cycles de Carnot.

Considérons le cycle ABCD, compris entre les lignes α et $\alpha + \Delta\alpha$, β et $\beta + \Delta\beta$; évaluons la quantité de chaleur fournie à ce cycle. Sur BC et AD, $dQ = 0$; sur AB et DC, T est constant, et comme $dQ = T\,dS$, dQ est le produit de T par l'accroissement de S. La quantité de chaleur à fournir au cycle est donc

$$(\alpha + \Delta\alpha)\Delta\beta - \alpha\,\Delta\beta = \Delta\alpha\,\Delta\beta = \text{const.}$$

La quantité de chaleur étant constante, l'aire des cycles l'est aussi et les parallélogrammes ont même surface.

Cette démonstration est de M. Bertrand.

44. *Quelle relation peut-on établir entre la chaleur interne* U *et l'entropie* S ?

$$dQ = c\,dT + AT\frac{dp}{dT}\,dv, \tag{15}$$

$$dS = \frac{dQ}{T} = c\frac{dT}{T} + A\frac{dp}{dT}\,dv,$$

$$\frac{dS}{dT} = \frac{c}{T}.$$

Mais, d'autre part,

$$\frac{dU}{dT} = c.$$

Donc

$$\frac{dS}{dT} = \frac{1}{T}\frac{dU}{dT}.$$

45. *Évaluer la pression p en fonction de* H, *la fonction caractéristique de M. Massieu.*

$$dH = S\,dT + Ap\,dv, \tag{18}$$

$$p = \frac{1}{A}\frac{dH}{dv}.$$

46. *Évaluer la chaleur spécifique, sous volume constant c, en fonction de* H.

$$c = \frac{dQ}{dT} = T\frac{dS}{dT} = T\frac{d^2H}{dT^2}.$$

47. *Déterminer* H *pour un gaz parfait.*

$$H = ST - U.$$

Calculons tour à tour S et U.

Admettons que $S_0 = 0$; nous avons [problème (**14**)],

$$S = c \log' \frac{T}{T_0} + AR \log' \frac{v}{v_0}.$$

De plus, en faisant encore $U_0 = 0$,

$$U = \int_0^T c\, dT = c(T - T_0),$$

ce qui suppose admise la constance de c.

En dernière analyse, il vient

$$H = cT \log' \frac{T}{T_0} - c(T - T_0) + ART \log' \frac{v}{v_0}.$$

48. *Les variations qu'éprouve le volume d'un corps, par l'effet d'une variation infiniment petite de pression, selon que la transformation a lieu suivant une isotherme ou une adiabatique, sont proportionnelles au rapport γ des chaleurs spécifiques.*

Sans variation de chaleur, $dQ = 0$.

Donc

$$(2) \qquad c\, dT + l\, dv = 0,$$

$$(5) \qquad C\, dT + h\, dp = 0.$$

Mais

$$(11) \qquad h = l\left(\frac{dv}{dp}\right),$$

(dv) désignant une variation de volume correspondant à une variation de pression (dp) à température constante.

On déduit de ces trois équations, par élimination de dT,

$$\frac{C}{c} dv = \frac{(dv)}{(dp)} dp.$$

Si la variation dp égale (dp), il vient

$$\frac{C}{c} = \frac{(dv)}{dv}.$$

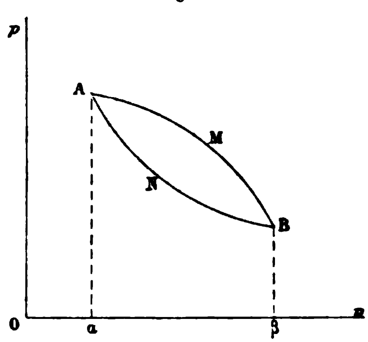
Ce théorème est dû à M. Reech ; le mode de démonstration est emprunté à M. Moutier ([1]).

49. *Démontrer que, lorsqu'on passe d'un état initial à un état final déterminé, la variation de la chaleur interne est indépendante du trajet accompli ou de la forme de la courbe de transformation.*

En effet, quand un corps reprend la même température et le même volume, il reprend la même force élastique ; sa chaleur interne repasse donc par la même valeur, quel que soit le trajet parcouru. Cette proposition n'est vraie que si la transformation est réversible.

On pourrait raisonner encore de la façon suivante : soient

Fig. 31.



A et B les points représentatifs de l'état initial et final (*fig.* 31) : AMB et BNA sont deux trajets réversibles.

$$(1) \qquad Q_{AMB} = U_A^B + A.\mathfrak{C}\,\alpha AMB\beta,$$
$$Q_{ANB} = U'^B_A + A.\mathfrak{C}\,\alpha ANB\beta.$$

([1]) On pourrait dire encore que les variations de pression produites par une variation infiniment petite de volume sont dans le rapport des chaleurs spécifiques.



La chaleur absorbée dans les deux trajets est égale à la variation de chaleur interne augmentée de la chaleur consommée par le travail externe.

Donc

$$Q_{AMB} - Q_{ANB} = U_A^B - U'^B_A + A(\mathfrak{T}\alpha AMB\beta - \mathfrak{T}\alpha ANB\beta).$$

Mais le cycle AMBNA est fermé.

Donc

$$Q_{AMB} - Q_{ANB} = A.\mathfrak{T}\,AMBNA.$$

Il faut donc que

$$U_A^B = U'^B_A.$$

50. *Démontrer que la chaleur de combinaison du fer doit diminuer dans un champ magnétique.*

Amenons le fer de l'infini au milieu du champ; produisons une combinaison, reportons le sel formé à l'infini et là décomposons-le en ses éléments : le cycle est fermé.

Soit $\mathfrak{T}$ le travail dépensé dans la première phase de transformation, x la chaleur de combinaison dans le champ, $\mathfrak{T}'$ le travail dépensé pour éloigner le sel et Q la chaleur de décomposition hors du champ.

$$\mathfrak{T} - \mathfrak{T}' = J(x - Q).$$

Or, $\mathfrak{T}'$ est négligeable et $\mathfrak{T}$ positif; donc

$$x > Q.$$

Cette remarque est de M. Janet : il a démontré ainsi que la force électromotrice d'une pile au fer doit diminuer dans un champ magétique.

51. *Démontrer que, pour les gaz parfaits, la courbe isodynamique coïncide avec la courbe isothermique.*

Cazin a appelé transformation isodynamique celle qu'on obtient en réglant la pression extérieure et l'introduction de

la chaleur, de telle sorte que le travail extérieur fût nul et la chaleur constante. Tel serait le cas d'une détente d'un gaz dans le vide, sans perte ni gain de chaleur : c'est l'expérience de Joule.

Or

$$dQ = dU + A\,p\,dv,$$

$$Q_0^1 = c(T_1 - T_0) + A\int_{v_0}^{v_1} p\,dv.$$

Mais le travail est nul; donc $A\int_{v_0}^{v_1} p\,dv = 0$.

De plus, $Q'_0 = 0$.

Donc $T_1 = T_0$.

L'hyperbole équilatère, qui représente la loi de Mariotte, est donc la courbe isodynamique des gaz parfaits : ce n'est vrai que dans ce cas.

52. *Un kilogramme d'air, dans les conditions $p_0 v_0 t_0$, prend le volume v_1 en se détendant dans un espace vide; quel est l'état final du gaz, en supposant que la paroi ne fournisse pas de calorique?*

$$Q = c(T_1 - T_0) + A\int_{v_0}^{v_1} p\,dv,$$

$$0 = c(T_1 - T_0) + A p'_0 (v_1 - v_0).$$

Si nous appelons p'_0 la pression surmontée par le gaz qui se détend; or $p'_0 = 0$; donc $T_1 = T_0$. La température finale est, par suite, égale à la température initiale, comme dans l'expérience de Joule.

53. *Un kilogramme d'air est à la pression de 2^{atm} et à la température de 15° C.; on le laisse détendre dans l'atmosphère sans perte ni gain de chaleur, jusqu'à ce que sa pression soit tombée à 1^{atm}, et l'on demande sa température finale et le travail extérieur développé, en tenant compte de ce que le changement est irréversible.*

Comme ci-dessus, nous avons

$$o = c(T_1 - T_0) + A p'_0 (v_1 - v_0).$$

De plus,

$$p_0 v_0 = RT_0, \qquad p_1 v_1 = RT_1,$$

et

$$C - c = c\left(\frac{C}{c} - 1\right) = c(\gamma - 1) = AR.$$

On déduit de ces équations

$$p'_0(v_1 - v_0) = -\frac{c}{A}(T_1 - T_0) = -\frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_0),$$

$$= -\frac{1}{\gamma - 1}(p_1 v_1 - p_0 v_0);$$

d'où

$$v_1[p_1 + (\gamma - 1)p'_0] = v_0[p_0 + (\gamma - 1)p'_0],$$

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{p_0 + (\gamma - 1)p'_0}{p_1 + (\gamma - 1)p'_0}.$$

Le travail final $\mathfrak{T}$ est égal à

$$p'_0(v_1 - v_0) = p'_0 v_0 \frac{p_0 - p_1}{p_1 + (\gamma - 1)p'_0}.$$

Ces équations se simplifient quand on pose

$$p'_0 = p_1,$$

Il vient

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{p_0 + (\gamma - 1)p_1}{\gamma p_1} = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{p_0}{p_1} + (\gamma - 1)\right],$$

$$\mathfrak{T} = \frac{p_0 - p_1}{\gamma} v_0 \qquad = \frac{p_0 - p_1}{\gamma} \frac{RT_0}{p_0}.$$

Appliquons les données :

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{1,41}(2 + 0,41) = 1,709.$$

La température finale T_1 est égale à

$$\frac{p_1 v_1}{R} = \frac{p_1}{p_0}\frac{v_1}{v_0}(T_0) = \frac{1}{2} \times 1,709 \times 288 = 246^\circ.$$

En détente adiabatique réversible, nous aurions trouvé, pour T_1, 236° absolus.

Enfin

$$\mathfrak{T} = \frac{p_0 - p_1}{\gamma}\frac{RT_0}{p_0} = \frac{1}{1,41}\frac{29,27 \times 288}{2} = 2989^{\text{kgm}}.$$

54. *On applique souvent, dans les calculs relatifs à l'écoulement des gaz, la formule approchée*

$$w^2 = 2gRT_0\left(\frac{p_0 - p_1}{p_0}\right) = 2gRT_0\left(1 - \frac{p_1}{p_0}\right);$$

estimer l'erreur commise et son signe.

La formule exacte est

$$(28) \qquad w'^2 = 2gRT_0\frac{\gamma}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right],$$

quand nous supposons que la variation de chaleur a été nulle.

Il vient donc

$$\frac{w^2}{w'^2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{1 - \frac{p_1}{p_0}}{1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \frac{Kx}{1 - (1 - x)^k};$$

si nous posons

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} = K \qquad \text{et} \qquad 1 - \frac{p_1}{p_0} = x.$$

Développons :

$$(1 - x)^k = 1 - \frac{Kx}{1} + \frac{K(K-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$
$$= 1 - \frac{Kx}{1} - \frac{K(1-K)}{1.2}x^2 + \ldots;$$

par suite,

$$\frac{w^2}{w'^2} = \frac{1}{1 + \frac{(1-K)}{2}x + \ldots} = \frac{1}{1 + \frac{0,71}{2}x}.$$

La valeur w^2 est donc trop faible, puisque le dénominateur est positif et plus grand que 1.

Faisons

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{2},$$

il vient

$$x = 0,5,$$

et

$$\frac{w^2}{w'^2} = \frac{1}{1,178}.$$

55. *Une masse d'air s'écoule dans l'atmosphère, hors d'un réservoir dans lequel la température est de 30° et la pression égale à 30^atm ; quelle est la vitesse d'écoulement et l'abaissement de température, en admettant que la paroi ne cède pas de chaleur au gaz?*

Par application des formules (28) et $\frac{T_1}{T} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ du problème **32**, nous trouvons

$$w = 400^{m},$$
$$T_1 = 221^\circ \text{ absolus} = -52^\circ \text{ C}.$$

56. *Vers quelles limites convergent les vitesses d'écoulement de l'air et de l'hydrogène, quand ces gaz, pris à une température de* 0° C., *passent d'une pression p_0, égale à* 1^{atm}, *à une pression p_1, très faible.*

$$w^2 = 2gRT_0 \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$
$$= 67,43\,RT_0.$$

La limite égale 735^m pour l'air et 2791^m pour l'hydrogène.

57. *Exprimer la vitesse d'écoulement adiabatique en fonction des températures initiale et finale.*

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}=\frac{C}{C-c}=\frac{C}{AR},$$

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\gamma-1}=\frac{T_1}{T_0},$$

$$1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\frac{T_0-T_1}{T_0}.$$

Donc

$$w^2=2g\frac{C}{AR}R(T_0-T_1)=2g\frac{C}{A}(T_0-T_1).$$

58. *De l'air s'écoule d'un réservoir, où la pression égale* 5^{atm}, *dans l'air libre; quelle chaleur faudra-t-il lui fournir pour que sa température reste constante et égale à* 50° C. ?

Pour obtenir ce résultat, il faudrait disposer d'une paroi très perméable à la chaleur : le cas est fictif, mais néanmoins intéressant.

$\frac{w^2}{2g}$ est une force vive; nous aurons donc :

$$(27)\quad Q=A\frac{w^2}{2g}=ART_0\log'\frac{p_0}{p_1}=AR.323\times\log'5$$
$$=35^{cal},75 \text{ par kilogr. d'air.}$$

59. *Démontrer qu'il n'y a pas lieu de tenir compte du frottement des gaz contre les parois des orifices, dans les formules de l'écoulement.*

Nous supposons évidemment que la paroi est imperméable au calorique.

Le frottement tend à ralentir le mouvement des molécules et à détruire leur force vive; mais il y a production d'une cer-

taine quantité de chaleur équivalente, dont il faut tenir compte.

$$(10, IV) \qquad \frac{w^2}{2g} = p_0 v_0 - p_1 v_1 + \int_{v_0}^{v_1} p\,dv.$$

Le travail extérieur $\int p\,dv$ a été emprunté à la chaleur interne du gaz, puisque nous supposons la paroi imperméable;

$$\int_{v_0}^{v_1} p\,dv = \frac{U_0 - U_1}{A}.$$

Mais le frottement, qui introduit une force retardatrice f, donne lieu à un travail résistant $\mathfrak{T}f$, à ajouter au terme $p_0 v_0 - p_1 v_1$; en même temps il donne lieu à une production de calorique $A\mathfrak{T}f$, à ajouter aussi à $U_0 - U_1$.

Il vient donc

$$\frac{w^2}{2g} = p_0 v_0 - p_1 v_1 - \mathfrak{T}f + \frac{U_0 - U_1 + A\mathfrak{T}f}{A}.$$

On voit que $\mathfrak{T}f$ disparaît de l'équation.

60. *Un réservoir de* 10^{lit} *de capacité est pourvu d'un orifice, percé en mince paroi, de* 7^{cq} *de section : on y comprime de l'air à* $1^{\text{atm}},5$ *de pression. Quel temps mettra-t-il à se vider dans l'atmosphère?*

$$(9, IV) \qquad \frac{w^2}{2g} = \frac{H + h - H}{\delta_1},$$

en appelant δ_1 la densité de l'air comprimé à la pression $H + h$; or soit δ la densité après expansion; nous aurons

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{H}{\delta_1}\left[\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\gamma} - 1\right].$$

La diminution de poids de l'air contenu à chaque instant dans le réservoir de volume V peut être représentée par $V\,d\delta$ et par $\sigma w\,dt$, σ étant la section de l'orifice d'écoulement et t le temps.

Nous écrirons, par conséquent,

$$V\,d\delta = \sigma\,dt\sqrt{\frac{2g}{\delta_1}H\left[\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\gamma}-1\right]}$$

et

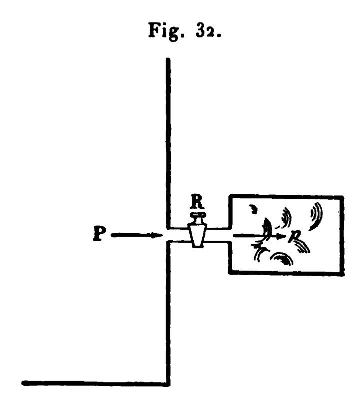
$$T=\int_{\delta_1}^{\delta}\frac{V}{\sigma}\frac{d\delta}{\sqrt{\frac{2g}{\delta_1}H\left[\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\gamma}-1\right]}}.$$

En intégrant par approximation entre les limites des densités δ_1 et δ, correspondant à 1,5 et 1^{atm}, et donnant à V et σ la valeur proposée, on trouvera pour T environ $0^{\text{s}},02$.

On a tiré parti de ce résultat pour la discussion de l'expérience de Clément et Desormes.

61. *Un réservoir d'acide carbonique renferme une grande masse de gaz à 5^{atm} de pression et 15° C. de température : on met une petite enceinte en communication avec ce réservoir*

Fig. 32.



(*fig.* 32), *et on la remplit de gaz à $2^{\text{atm}},5$ de pression. On demande de déterminer la température de ce gaz?*

Soient P et T la pression et la température du gaz dans le réservoir; au moment de l'ouverture du robinet R, le gaz se dilate brusquement, sa pression tombe à une valeur p, sa

température baisse à t, et il traverse l'orifice avec une vitesse w, que l'exercice 57 nous donne le moyen de calculer. Nous avons

$$\frac{t}{T}=\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

et

$$w^2=2g\frac{C}{A}(T-t).$$

Mais cette vitesse s'anéantit contre les parois de la petite enceinte; la force vive détruite réapparaît sous forme de chaleur, et la température du gaz s'élève à la valeur de θ, qu'il faut déterminer. Nous aurons évidemment

$$c\theta=ct+\frac{Aw^2}{2g},$$

car la chaleur interne du fluide qui remplit l'enceinte est égale à celle de l'air à son passage à travers l'orifice, augmentée de l'équivalent de la force vive perdue. On en déduit

$$\begin{aligned} c\theta &= ct+C(T-t) \\ &= ct+CT\left[1-\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] \\ &= cT\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}+CT\left[1-\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]; \end{aligned}$$

d'où enfin

$$\theta=T\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}+\gamma T\left[1-\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right],$$

$$\frac{\theta}{T}=\gamma-(\gamma-1)\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Il vient donc

$$\frac{\theta}{T}=1,29-0,29\left(\frac{1}{2}\right)^{0,225},$$

$$\theta=300^\circ \text{ absolus}=27^\circ\text{C}.$$

L'augmentation de température est donc égale à 12°C.; il est à remarquer qu'elle eût été plus grande si la même opération avait été effectuée sur l'air.

62. *Dans l'expérience de l'exercice précédent, quelle a été la durée du remplissage? Le réservoir est d'une capacité illimitée; σ est la section de l'ajutage du robinet et* V *le volume de l'enceinte à remplir à p atmosphères : cette enceinte renfermait d'abord du gaz à π atmosphères de pression.*

Ce problème ne pourrait être résolu si nous appliquions les formules exactes de l'écoulement des gaz, qui sont fort compliquées; mais nous arriverons à une solution approchée par la formule

$$(9, \text{IV}) \qquad \frac{w^2}{2g} = \frac{(\text{H}+h)-\text{H}}{\delta_1}$$

fondée sur l'incompressibilité des tranches.

Le volume d'air qui traverse l'ajutage pendant le temps dt est

$$w\sigma\,dt;$$

son poids est égal à

$$w\sigma\,dt\,\frac{\text{P}}{\text{RT}}.$$

Soit dx l'augmentation de pression dans l'enceinte durant ce même intervalle dt; le poids de gaz qui y a pénétré est

$$\frac{\text{V}\,dx}{\text{RT}}.$$

Nous avons évidemment

$$w\sigma dt\frac{\text{P}}{\text{RT}} = \frac{\text{V}\,dx}{\text{RT}},$$

$$\text{P}w\sigma\,dt = \text{V}\,dx.$$

Remplaçons w par sa valeur $\sqrt{2g\dfrac{\text{P}-x}{\delta_1}} = \sqrt{2g\dfrac{\text{P}-x}{\dfrac{\text{P}}{\text{RT}}}}$;

il vient

$$P\sigma\sqrt{2g\frac{P-x}{P}RT}\,dt = V\,dx$$

ou

$$dt = \frac{V}{\sigma}\sqrt{\frac{1}{2PgRT}}\,\frac{dx}{\sqrt{P-x}}.$$

Pour trouver le temps t cherché, nous devons intégrer entre les limites $x=\pi$ et $x=p$:

$$t = \frac{V}{\sigma}\sqrt{\frac{1}{2PgRT}}\,2\sqrt{P-x}$$
$$= \frac{2V}{\sigma}\sqrt{\frac{1}{2gRT}}\sqrt{\frac{p-\pi}{P}}.$$

63. *Quelle est à zéro et à* 100° *la vitesse moyenne u du mouvement de translation d'une molécule d'acide carbonique ?*

(30) $$\tfrac{1}{3}nmu_0^2 = p_0 v_0 \alpha T.$$

A zéro :

$$u_0 = \sqrt{3g\frac{10333}{1,977}} = 392^{m}.$$

A 100° :

$$u_{100} = \sqrt{3g\frac{10333}{1,977}\,\frac{373}{273}} = 456^{m}.$$

64. *La vitesse moyenne des molécules de l'air est de* 485^{m} *à zéro. A quelle hauteur s'élèveraient ces molécules, suivant la verticale, si elles n'étaient déviées par aucun obstacle et que la température moyenne de l'atmosphère fût égale à* — 10° C. ?

$$u = 485\sqrt{\frac{263}{273}},$$
$$h = \frac{u^2}{2g} = 12^{km}.$$

La hauteur de l'atmosphère est plus grande; mais aussi u n'est-elle qu'une valeur moyenne.

II. — Changements d'état; étude des vapeurs.

Sadi Carnot avait publié, en 1824, ses *Réflexions sur la puissance motrice du feu;* dès 1834, Clapeyron indiqua le moyen d'appliquer le principe de Carnot à l'étude d'un changement d'état, dans un travail célèbre intitulé : *Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur*. La méthode de Clapeyron consistait à considérer exclusivement des cycles infiniment petits, assimilables à des parallélogrammes; elle a fourni des résultats d'une telle généralité, qu'ils peuvent s'appliquer à tous les changements d'état. Nous nous bornerons à rappeler les formules auxquelles conduit cette théorie si remarquable.

Si nous appelons λ la chaleur latente d'un changement d'état, C et C′ les chaleurs spécifiques du corps sous les deux états, sous la pression p et à la température T, h et h' les chaleurs latentes d'augmentation de pression, nous pouvons écrire

$$(32) \qquad \frac{d\lambda}{dT} + C + h\frac{dp}{dT} - \left(C' + h'\frac{dp}{dT}\right) = A(v' - v)\frac{dp}{dT};$$

dans cette formule, v' et v sont les volumes spécifiques avant et après le changement d'état.

On a de plus

$$(33) \qquad \frac{\lambda}{T} = A(v' - v)\frac{dp}{dT};$$

enfin, si l'on pose

$$C + h\frac{dp}{dT} = m \qquad \text{et} \qquad C' + h'\frac{dp}{dT} = m',$$

il vient

$$(34) \qquad \frac{\lambda}{T} = \frac{d\lambda}{dT} + m - m'.$$

Ces formules sont applicables aux phénomènes de fusion et devaporisation.

Occupons-nous plus spécialement des vapeurs.

Les vapeurs sont dites *saturées* ou *surchauffées,* suivant qu'elles sont ou non en présence du liquide générateur ; dans le premier cas, la force élastique de la vapeur ne dépend que de sa température et nullement de son volume ; dans le second cas, la vapeur a les propriétés d'un gaz permanent. Faisons observer que le passage de l'un à l'autre de ces états si distincts n'est pas brusque. Ainsi, pour la vapeur d'eau surchauffée, on trouve que la relation $pv = RT$ est bien près d'être exacte ; mais elle ne répond plus à la réalité au voisinage du point de saturation pour lequel on a

$$pv = 33,59\,(T + 127).$$

Regnault a déterminé pour un grand nombre de liquides les relations qui lient les pressions aux températures : rappelons la formule connue pour la vapeur d'eau,

$$\log p = a + b\alpha^t + c\beta^t,$$

dans laquelle p est exprimé en millimètres de mercure et t en degrés C. Zeuner a calculé, d'après le travail de Regnault, des Tables dont l'usage est extrêmement commode ; nous en donnerons un extrait plus loin.

Regnault a mesuré les quantités totales de chaleur L nécessaires pour transformer 1^{kg} de liquide, à 0°, en vapeur à t°C., et il a donné pour un grand nombre de liquides des formules de la forme

$$L = a + bt + ct^2 + dt^3.$$

Voici quelques-unes de ces formules :

Eau :

$$L = 606,5 + 0,305\,t.$$

Alcool :

$$L = 236,5 + 0,308\,t \text{ (formule douteuse)}.$$

Éther :

$$L = 94 + 0,45\,t - 0,5 \times 10^{-3}\,t^2.$$

Le même physicien avait déterminé les quantités de cha-

leur q nécessaires pour porter 1^{kg} de liquide, en contact avec sa vapeur, de 0° à t°; ce sont les valeurs q suivantes.

Eau :

$$q = t + 0,2 \times 10^{-4} t^2 + 0,3 \times 10^{-6} t^3.$$

Alcool :

$$q = 0,54754 t + 0,11218 \times 10^{-2} t^2 + 0,2206 \times 10^{-5} t^3.$$

Éther :

$$q = 0,529 t + 0,2959 \times 10^{-3} t^2.$$

La connaissance de L et q conduit à celle de λ; en effet,

$$L = q + \lambda \qquad \text{et} \qquad \lambda = L - q.$$

Nous avons ainsi :

Eau :

$$\lambda = 606,5 - 0,695 t - 0,2 \times 10^{-4} t^2 - 0,3 \times 10^{-6} t^3.$$

Alcool :

$$\lambda = 236,5 - 0,239 t - 0,11218 \times 10^{-2} t^2 \text{ (formule douteuse).}$$

Éther :

$$\lambda = 94 - 0,079 t - 0,851 \times 10^{-3} t^2.$$

Les chaleurs latentes de vaporisation diminuent avec la température.

L'application des deux principes de la Thermodynamique aux vapeurs conduit aux très importantes conclusions qui suivent. L'équation (1 *bis*) devient

$$dU = \frac{dU}{dv} dv,$$

parce que $dp = 0$ quand $dt = 0$; l'équation (1 *ter*) donne, pour la chaleur dQ fournie pendant la vaporisation,

$$dQ = \left(\frac{dU}{dv} + Ap\right) dv.$$

En intégrant cette équation, depuis le volume v que possède le liquide générateur jusqu'au volume v' de la vapeur saturée, et remarquant qu'à température constante p est constant, nous aurons

$$(35) \quad \int_v^{v'} \left(\frac{dU}{dv} + Ap\right) dv = \lambda = U_v^{v'} + Ap(v' - v) = U + Apu;$$

U désigne l'accroissement de chaleur interne et u l'accroissement de volume dans le phénomène du changement d'état. Apu est donc la chaleur dépensée pour produire le travail d'expansion qui accompagne le passage de l'état liquide à l'état de vapeur; c'est ce que Zeuner appelle *chaleur latente externe,* alors que U est la *chaleur latente interne.*

Enfin l'équation (15) donne

$$(35 \ bis) \qquad dQ = AT \frac{dp}{dt} dv;$$

en intégrant entre les limites v et v', nous aurons

$$\lambda = AT \frac{dp}{dt} (v' - v) = ATu \frac{dp}{dt},$$

formule que nous connaissions déjà par les études de Clapeyron et de Clausius [1]. Cette relation, dans laquelle tout est connu, nous permet de calculer u, et par suite v', et enfin $\frac{1}{v}$, c'est-à-dire la densité de la vapeur.

La quantité m, signalée plus haut, a une grande importance pour les vapeurs : c'est la *chaleur spécifique de la vapeur saturée.* On la définit par l'équation (34) : sa valeur est négative pour l'eau et positive pour l'éther. Cela signifie que la compression de la vapeur d'eau est accompagnée d'un dégagement de chaleur, sa détente, d'une absorption; il y a donc

---

[1] L'équation λ est souvent désignée sous le nom de *formule de Clapeyron.*



surchauffe ou condensation, tandis que l'inverse a lieu pour la vapeur d'éther.

Le fait de la condensation de la vapeur d'eau dans la détente a été découvert par MM. Clausius et Rankine, par des méthodes d'investigation théorique. M. Bertrand montre très clairement comment ce phénomène se produit.

« La vapeur se dilate dans le cylindre d'une machine à vapeur. La dilatation est une cause de refroidissement. Le refroidissement tend à condenser la vapeur. D'un autre côté, l'accroissement de volume permet au même poids de vapeur de rester à l'état de saturation à une température moindre. Deux effets contraires sont donc en présence. Lequel des deux l'emportera ?..... On avait cru, sur la foi de Watt, à une compensation parfaite : la vapeur, refroidie par l'expansion, devait saturer, à chaque instant, l'espace occupé par elle. Quand, après le travail d'une machine, on trouvait de l'eau dans le cylindre, on la croyait sortie de la chaudière et entraînée mécaniquement ». 1^{kg} d'air à 150° et 5^{atm} de pression, se dilatant jusqu'à ce que sa tension soit devenue égale à l'atmosphère, se refroidit de 210° ; le même poids de vapeur d'eau saturée, pris dans les mêmes conditions de température et de pression, ne perdrait que 50°, puisque sa température tombe à 100° à la pression de l'atmosphère. Cette moindre chute de température tient à une condensation de vapeur ; la fonction U diminue par la substitution d'un liquide à la vapeur ; cette condensation s'explique donc aisément. Si pour quelques vapeurs il y a compensation ou un phénomène inverse, il faut en chercher la cause dans les chaleurs spécifiques.

Il nous reste à dire un mot des vapeurs surchauffées : ne nous occupons que de la vapeur d'eau.

Les propriétés de la vapeur d'eau surchauffée sont mal connues ; mais on sait qu'elle suit à peu près les lois de Mariotte et de Gay-Lussac ; toutefois α, au lieu d'être égal à $\frac{1}{273}$, paraît, d'après M. Hirn, plus voisin de $\frac{1}{250}$. Admettons ce chiffre. Sa chaleur spécifique à pression constante est égale à 0,48.

Nous pouvons écrire

$$(36)\quad pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t) = \frac{p_0 v_0}{250}(250 + t) = R(250 + t);$$

v_0 est connu; prenons-le égal à 1,651.

Il vient donc, à 100° C.,

$$R = \frac{10333 \times 1,651}{250 + 100} = 46,60.$$

A une température suffisamment élevée, on aurait

$$R = \frac{29,27}{0,622} = 47,06.$$

C'est une valeur limite; dans ce cas, on pourrait écrire

$$pv = RT\ ^{(1)}.$$

Le programme de l'étude des vapeurs surchauffées est le même que celui de l'étude des gaz.

Le rapport γ des chaleurs spécifiques égale 1,30.

---

(1) M. Herwig a présenté les mêmes résultats d'une manière différente: il considère R comme variable au voisinage de la saturation et tendant vers une valeur limite constante, qui est atteinte à 325° C.

TABLES DE ZEUNER (extraits).

Vapeur d'eau saturée.

t.	*p.*	$\frac{dp}{dt}$.	L	*q.*	λ.	A*pu.*	*u.*
0.......	4,600	0,3289	606,500	0,000	606,500	31,071	210,66
5.......	6,534	0,4503	608,025	5,000	603,025	31,475	150,23
10.......	9,165	0,6088	609,550	10,002	599,548	31,892	108,51
15.......	12,699	0,8132	611,075	15,005	596,070	32,318	79,346
20.......	17,391	1,0738	612.600	20,010	592,590	32,755	58,720
25.......	23,550	1,4022	614,125	25,017	589,108	33,201	43,963
30.......	31,548	1,8117	615,650	30,026	585,624	33,656	33,266
35.......	41,827	2,3171	617,175	35,037	582,138	34,119	25,436
40.......	54,906	2,9347	618,700	40,051	578,649	34,588	19,644
45.......	71,390	3,6825	620,225	45,068	575,157	35,064	15,315
50.......	91,980	4,5800	621,750	50,087	571,663	35,544	12,049
55.......	117,475	5,6484	623,275	55,110	568,165	36,027	9,5613
60.......	148,786	6,9100	624,800	60,137	564,663	36,512	7,6513
65.......	186,938	8,3891	626,325	65,167	561,158	36,996	6,1711
70.......	233,082	10,111	627,850	70,201	557,649	37,478	5,0139
75.......	288,500	12,104	629,375	75,239	554,136	37,955	4,1024
80.......	354,616	14,395	630,900	80,282	550,618	38,425	3,3789
85.......	433,002	17,017	632,425	85,329	547,096	38,885	2,8003
90.......	525,392	20,002	633,950	90,381	543,569	39,332	2,3344
95.......	633,692	23,388	635,475	95,438	540,037	39,762	1,9566
100.......	760,000	27,189	637,000	100,500	536,500	40,205	1,6496
110.......	1075,370	36,212	640,050	110,641	529,409	41,048	1,1903
120.......	1491,280	47,348	643,100	120,806	522,294	41,858	0,8752
130.......	2030,280	60,873	646,150	130,997	515,153	42,634	0,6548
140.......	2717,630	77,060	649,200	141,215	507,985	43,377	0,4977
150.......	3581,230	96,171	652,250	151,462	500,788	44,086	0,3839
200.......	11688,960	243,438	667,500	203,200	464,300	47,133	0,1257

Les températures sont exprimées en degrés C.; les pressions sont estimées en millimètres de mercure d'après Regnault; L est la chaleur totale, *q* la chaleur du liquide et λ la chaleur de vaporisation; A*pu* représente la chaleur latente externe.

APPLICATIONS.

65. *Calculer* $\frac{dT}{dp}$, *c'est-à-dire le rapport entre la variation de température et la variation de pression pour la glace fondante, de densité* 0,923.

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\lambda}{T} = A(v' - v)\frac{dp}{dT}, \\ &\frac{dT}{dp} = \frac{AT(v' - v)}{\lambda} = 273\,(0{,}001 - 0{,}00108) \\ &\qquad = -0{,}64 \times 10^{-6}. \end{aligned} \right.$$

Sir William Thomson a trouvé expérimentalement que la température s'abaisse de $-0°{,}75 \times 10^{-2}$ pour un accroissement de pression de 1^{atm}, soit de 10333^{kg} par mètre carré. Pour comparer le résultat du calcul précédent à celui qu'a obtenu ce savant physicien, il faut multiplier $\frac{dT}{dp}$ par 10333, ce qui donne $0{,}66 \times 10^{-2}$.

66. *Quel est l'excès de la chaleur interne de la vapeur à* 100° *sur l'eau liquide à la même température.*

Il s'agit évidemment du kilogramme de vapeur saturée.

L'énergie U de la vapeur est

$$(35)\qquad U = CT + \lambda - Apu.$$

L'énergie U′ de l'eau serait

$$U' = CT.$$

Donc

$$U - U' = \lambda - Apu = 536{,}500 - 40{,}205 \quad \text{(Tables.)}$$
$$= 496{,}295.$$

67. *Calculer la densité de la vapeur d'eau à* 150° C.

$$u = 0{,}3839 = v' - v,$$
$$v' = u + v = 0{,}3849 \text{ en mètres cubes},$$
$$\delta = \frac{1}{v'} = 2{,}6 \text{ en kilogrammes}.$$

Ces deux exemples permettent de juger de l'utilité des Tables de Zeuner.

68. *Calculer la variation d'entropie d'une vapeur de* T_0 *à* T°.

(15 et 35 *bis*)
$$\left\{\begin{aligned} S &= \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{C\,dT}{T} + \frac{AT}{T}\frac{dp}{dT}\,dv \\ &= C\log' \frac{T}{T_0} + Au\frac{dp}{dT}. \end{aligned}\right.$$

69. *Déterminer la fonction caractéristique pour une vapeur saturée.*

(18)
$$H = ST - U,$$
$$S = C\log' T + Au\frac{dp}{dT},$$
$$U = CT + \lambda - Apu = CT + ATu\frac{dp}{dT} - Apu,$$
$$H = CT\log' T - CT + Apu.$$

70. *On évapore* 1^{kg} *d'eau de* 0° *à* 100°, *sous la pression de l'atmosphère; combien faut-il lui fournir de calories et quelle portion de ce calorique est dépensée en travail externe?*

$$L = (606{,}5 + 0{,}305 \times 100) = 637^{cal},$$
$$\mathfrak{T} = Apu = 40^{cal}{,}205.$$

71. *Calculer l'expression de la chaleur interne d'une vapeur d'eau humide, contenant* 20 *pour* 100 *d'eau, entre* 0° *et* 100°.

Sur 1^{kg} de mélange, il y a 80 pour 100 de vapeur et 20 pour 100 d'eau liquide.

L'augmentation de chaleur interne du liquide est

$$0,20\,q = 0,20\,(100 + 0,500) = 20,10.$$

L'augmentation de chaleur interne de la vapeur est

$$0,8\,(q + \lambda - \mathrm{A}pu) = 0,8\,(100,500 + 536,500 - 40,205)$$
$$= 596,795.$$

Soit, en tout,

$$20,100 + 596,795 = 616,895.$$

72. *Donner l'expression de l'entropie d'une vapeur humide, contenant un poids* π *de vapeur par kilogramme de mélange de* T_0 *à* T^o.

Pour le liquide, de T_0 à T, nous aurons

$$S' = C \log \frac{T}{T_0}.$$

Pour la vapeur formée à T, il viendra

$$S'' = \int \frac{\lambda\, d\pi}{T} = \frac{\pi\lambda}{T}.$$

L'entropie du mélange est donc

$$C \log' \frac{T}{T_0} + \pi \frac{\lambda}{T}.$$

73. *Trouver une formule générale des densités de vapeur par rapport à l'air.*

Soit V le volume du kilogramme d'air, v' celui du kilogramme de vapeur et v celui du même poids de liquide.

Nous aurons

$$\delta = \frac{\frac{1}{v'}}{\frac{1}{V}} = \frac{V}{v'},$$

$$V = \frac{RT}{p},$$

$$v' - v = \frac{1}{A}\frac{\lambda}{T}\frac{dT}{dp}.$$

Négligeons v :

$$\delta = AR\frac{T^2}{p\lambda}\frac{dp}{dT}.$$

74. ***Trouver une expression générale des forces élastiques des vapeurs saturées en fonction de la température absolue.***

De l'équation en δ du problème précédent, nous tirons

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{AR}\delta\lambda\frac{dT}{T^2},$$

d'où

$$\log'\frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{AR}\int_{T_0}^{T_1}\delta\lambda\frac{dT}{T^2}.$$

Si l'on admettait que $\delta\lambda$ fût constant, on aurait

$$\log'\frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{AR}\delta\lambda\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right).$$

75. ***Calculer la chaleur dQ absorbée dans la détente d'une vapeur humide, tant que cette vapeur reste saturée : on supposera qu'il y avait un poids π de vapeur par kilogramme de mélange.***

L'énergie interne U du mélange est connue :

$$\begin{aligned} U &= q(1-\pi) + (\lambda + q - Apu)\pi \\ &= q + (\lambda - Apu)\pi \\ &= \int C\,dT + (\lambda - Apu)\pi. \end{aligned}$$

Donnons au mélange un accroissement de volume dv, avec production de travail externe ; il vient

$$\begin{aligned} dU &= CdT + d(\lambda\pi) - d(\pi A p u) \\ &= CdT + d(\lambda\pi) - Apd(\pi u) - Au\pi dp. \end{aligned}$$

Mais nous pouvons remplacer $Audp$ par $\frac{\lambda dT}{T}$; d'où

$$(33) \qquad dU = CdT + d(\lambda\pi) - Apd(\pi u) - \lambda\pi \frac{dT}{T}.$$

C'est la quantité de chaleur que gagne le mélange pendant la détente ; $Apd(\pi u)$ est la chaleur consommée par le travail externe ; comme nous devons en tenir compte, nous aurons

$$dQ = CdT + d(\lambda\pi) - \lambda\pi \frac{dT}{T}.$$

Si l'on faisait l'hypothèse que $dQ = 0$, c'est-à-dire si l'on ne fournissait pas de calorique au mélange pendant la détente, nous savons qu'il y aurait une condensation : cette formule permet de calculer la valeur π correspondante à une température T, quand on connaît π_0 correspondant à T_0. En effet, faisons $dQ = 0$, il vient

$$CdT + d(\lambda\pi) - \lambda\pi \frac{dT}{T} = 0.$$

Divisons par T et intégrons entre les limites T et T_0,

$$C \log' \frac{T}{T_0} + \frac{\lambda\pi}{T} - \frac{\lambda\pi_0}{T_0} = 0;$$

d'où l'on déduira π en fonction de π_0 : le signe de π dépend évidemment des valeurs de C et de λ.

76. *Démontrer que, dans la courbe des tensions des vapeurs, on doit trouver un point angulaire pour la température zéro.*

Il suffit de démontrer qu'en ce point $\frac{dp}{dT}$ change brusquement de valeur.

Or, au-dessous de zéro, la vapeur se forme par évaporation de glace; au-dessus de zéro, par évaporation d'eau; dans ce cas, le phénomène exige 80^{cal} de moins. Appelons dQ' la chaleur à fournir à la glace et dQ celle qu'il faut céder à l'eau: nous aurons

$$dQ' = dQ + 80$$

par kilogramme de vapeur fournie.

Or

$$dQ = AT\frac{dp}{dT}dv.$$

Admettant que dv ait la même valeur pour l'eau liquide et la glace, il faudra nécessairement que $\frac{dp}{dT}$ soit différent, et plus grand pour la glace que pour l'eau évaporée.

Cette découverte est due à M. Kirchhoff.

77. *Un liquide de densité* 0,8, *et dont la densité de vapeur saturée à* $+50^\circ$ *est* 2,1, *possède à cette température une force élastique maximum* F *équilibrée par* $0^m,608$ *de mercure; on sait, de plus, qu'à* 50°, $\frac{dp}{dT}$ *correspond à* $21^{mm},858$ *de mercure.*

Cela posé, on demande de calculer :

1° *Le travail externe de la vaporisation de* 1^{gr} *de ce liquide dans une atmosphère à la pression de* 608^{mm} *et à cette même température de* 50°;

2° *La chaleur latente de vaporisation dans les mêmes conditions;*

3° *L'accroissement de l'entropie dans les mêmes conditions* (1).

(1) Question posée aux examens de Licence, par la Faculté des Sciences de Paris, en novembre 1887.



Le travail externe $\mathfrak{T}$ est égal à pu :

$$\mathfrak{T} = pu = p(v' - v) = p\left(\frac{1}{2,1 \times 1,293} - \frac{1}{800}\right)$$
$$= \frac{608}{760} \times 10333(0,3690 - 0,0012)$$
$$= 3040^{\text{kgm}} \text{ par kilogramme}$$
$$= 3^{\text{kgm}},04 \text{ par gramme.}$$

La chaleur latente $\lambda = \mathrm{AT}u\dfrac{dp}{d\mathrm{T}}$.

$$\lambda = \frac{1}{425} \times 323 \times 0,3678 \times 21,858 \times \frac{10333}{760}$$
$$= 830^{\text{cal}},5 \text{ par kilogramme}$$
$$= 0^{\text{cal}},830 \text{ par gramme.}$$

L'accroissement de l'entropie dans les mêmes conditions signifie, puisqu'on n'indique pas d'autres limites et qu'on ne donne pas C, la variation de l'entropie dans le passage de l'état liquide à l'état de vapeur; elle varie dans ce cas de

$$\mathrm{A}u\frac{dp}{d\mathrm{T}} = 2,57 \text{ par kilogramme}$$
$$= 0,257 \times 10^{-2} \text{ par gramme.}$$

78. *Calculer le rapport γ des chaleurs spécifiques de la vapeur d'eau surchauffée.*

$$\gamma = \frac{\mathrm{C}}{c} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C} - \mathrm{AR}} = \frac{0,48}{0,48 - \frac{1}{425} \times 47,0} = 1,30.$$

79. *Calculer la variation de la chaleur interne d'un corps composé, entre un état initial où il n'a pas encore subi de dissociation, à T_0, sous le volume S, et un état final où il est partiellement dissocié, à T°, sous le volume total S', la dissociation ayant produit un poids π de gaz par kilogramme.*

Supposons le corps renfermé dans une enceinte de volume égal au sien, et faisons croître ce volume en élevant en même temps sa température de manière à produire sa dissociation. Une portion $d\pi$ se décompose ; la chaleur à fournir est

$$(15) \qquad dQ = AT\frac{dp}{dT}dv = \lambda\, d\pi;$$

λ est la chaleur nécessaire pour dissocier l'unité de poids du corps : nous aurons donc

$$\lambda\pi = AT\frac{dp}{dT}(S' - S),$$

$$dU = C\,dT + \lambda\pi - Ap\,dv,$$

$$U - U_0 = C(T - T_0) + \lambda\pi - Ap(S' - S).$$

80. *Calculer la variation d'entropie dans les mêmes conditions.*

$$dS = \frac{dQ}{T} = C\frac{dT}{T} + \frac{\lambda\pi}{T},$$

$$S - S_0 = C\log'\frac{T}{T_0} + \frac{\lambda\pi}{T}.$$

III. — Étude des machines thermiques.

On appelle *machines thermiques*, non seulement des mécanismes, mais des systèmes de corps qui ont pour objet de transformer la chaleur en travail : leur fonctionnement suppose toujours l'intervention de deux corps au moins, dont le plus chaud fournit du calorique alors que le plus froid en enlève à un corps intermédiaire, de façon à reproduire son état initial et à lui faire parcourir un cycle périodique.

Si Q est la chaleur fournie par le foyer et q la chaleur reprise par le réfrigérant, $\frac{Q-q}{Q}$ est le *coefficient économique* de la machine fonctionnant suivant le cycle de Carnot; on

l'écrit ρ et il est égal à

$$\frac{T-t}{T} = 1 - \frac{t}{T} \quad (37)$$ [1].

Ce coefficient ne dépend que de T et t, et il est le même pour toutes les machines thermiques qui travaillent entre les mêmes limites de température, quelle que soit la nature du corps intermédiaire.

$\frac{q}{Q}$ est la fraction de calorie qui passe du foyer au réfrigérant sans être utilisée; elle est égale à $\frac{t}{T}$.

La valeur $1 - \frac{t}{T}$ du coefficient économique est la plus grande qu'il soit possible d'obtenir entre deux sources de températures T et t. Le rendement du cycle de Carnot est donc maximum. Mais hâtons-nous de dire que, si ce rendement ne peut être dépassé par celui d'aucun autre cycle, il peut du moins être atteint par un grand nombre d'entre eux. Pour cela, il faut et il suffit qu'ils répondent aux deux conditions suivantes :

1° Il faut que les échanges de chaleur des sources aient lieu comme dans le cycle de Carnot, à température constante.

2° Il est nécessaire que les deux opérations, par lesquelles s'effectue le passage d'une source à l'autre, soient telles que la quantité de chaleur fournie par l'une suffise à l'accomplissement de l'autre.

La courbe fermée, représentative d'un tel cycle, est donc composée de deux isothermiques et de deux *isodiabatiques;* c'est le nom qu'on a donné aux lignes d'égale transmission qui remplacent les lignes de nulle transmission.

Ce genre de cycle a, avec celui de Carnot, une analogie manifeste. Dans le cycle de Carnot, le travail extérieur effectué suivant l'adiabatique de détente est égal au travail extérieur

---

[1] Si $\mathfrak{G}$ représente le travail accompli dans le cycle, on peut écrire

$$A\mathfrak{G} = Q\rho = \frac{T-t}{T}; \quad (37\ bis)$$

cette nouvelle expression du second principe est très utile dans la pratique.

dépensé suivant l'adiabatique de compression, de telle sorte que toute la transformation utile de chaleur en énergie s'effectue suivant l'isothermique supérieure; il en est de même dans les cycles considérés, puisque les quantités de chaleur absorbées et dégagées sur les isodiabatiques sont égales, et que c'est encore sur les isothermiques que se produit utilement la conversion de la chaleur en travail. Il est dès lors évident qu'on aura, comme pour le cycle de Carnot,

$$\rho = \frac{Q - q}{Q} = \frac{T - t}{T}.$$

On peut prendre arbitrairement une des lignes de transformation : l'autre est nécessairement déterminée par la condition imposée. On démontre sans peine que les deux lignes répondent à une équation de même nature.

Pour juger de la valeur économique et théorique d'un cycle proposé, il convient de comparer le travail qu'il donne effectivement au travail maximum disponible.

On peut encore calculer d'abord le coefficient économique d'un moteur parcourant le cycle proposé, puis le comparer au coefficient économique du cycle de Carnot, entre les mêmes limites de température.

Le résultat de la comparaison du travail effectif au travail disponible, ou bien le rapport des deux coefficients économiques, donne le *rendement générique* de la machine thermique. C'est ce rendement générique qui caractérise la machine; c'est par lui qu'on peut juger de la valeur relative de deux cycles.

Nous désignerons le rendement générique par la lettre ρ'.

La connaissance du rendement générique d'une machine n'est pas encore suffisante dans la pratique, car la note qui en résulte est incomplète à certains égards. En effet, on ne recueille pas tout le travail brut appliqué sur les pistons des moteurs; par suite du frottement, des chocs, de l'inertie et de toutes les résistances passives des organes mécaniques, il se perd une portion du travail fourni par la conversion du calorique et l'on ne trouve sur l'arbre de couche qu'une fraction du travail brut emmagasiné par le piston. Le travail dispo-

nible sur l'arbre de couche se mesure au frein de Prony; il est immédiatement utilisable; le travail disponible sur le piston s'évalue par l'indicateur de Watt et il s'appelle le *travail indiqué*. Le rapport entre le travail indiqué et le travail réellement utilisable sur l'arbre moteur constitue le rendement pratique de la machine. C'est ce rendement qui frappe le plus vivement les esprits, parce que sa notion, facilement accessible, semble moins théorique et par là même plus industrielle. En réalité, le rendement pratique ne dépend que de la construction plus ou moins parfaite et de l'agencement plus ou moins ingénieux des organes. Ce rendement n'est pas caractéristique d'un type de machines à feu; il dépend des conditions particulières de telle ou telle machine spécialement considérée.

Nous avons insisté sur ces considérations qui doivent être familières aux physiciens.

APPLICATIONS.

81. *Calculer le travail maximum que peut produire une calorie prise à une source dont la température est de* 150° C.

$$\mathfrak{T} = \frac{(273 + 150) - 273}{273 + 150} = 149^{\text{kgm}}.$$

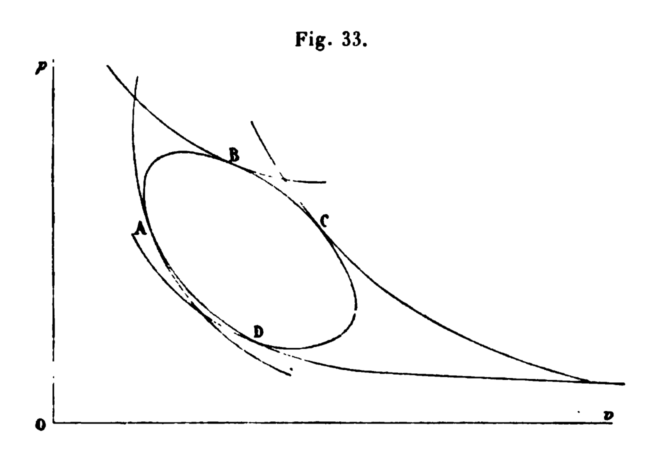
Pour produire 425^{kgm}, il faudrait que l'on pût disposer d'un réfrigérant au zéro absolu. C'est aussi impossible, mais ce serait tout aussi nécessaire, que d'atteindre le centre de notre globe pour actualiser toute l'énergie d'une chute d'eau.

82. *Étant donné un cycle quelconque* ABCD (*fig.* 33), *reconnaître la période pendant laquelle on cède de la chaleur au corps et celle pendant laquelle on lui en soustrait.*

Il suffit pour cela de construire deux couples d'isothermes et d'adiabatiques tangentes au cycle proposé; de A en C il y a transmission de calorique, tandis qu'on en reprend de C en A par D.

83. *Un canon de 100 tonnes lance un projectile de* 917^{kg} *avec une vitesse de* 523^{m} *à la seconde, et il exige une charge*

Fig. 33.



de 250^{kg} *de poudre dont le pouvoir calorifique est de* 723^{cal}; *quel est le rendement de cet engin de guerre?*

$$(37\ bis) \qquad \rho = \frac{A\mathfrak{T}}{Q} = \frac{12772000}{76850000} = 0,16.$$

84. *On prend* 1^{mc} *d'air à zéro sous la pression de l'atmosphère:* 1° *on le chauffe sous volume constant à* 100°; 2° *le gaz se détend suivant une adiabatique jusqu'à ce que la pression redevienne celle de l'atmosphère;* 3° *on refroidit le gaz sous la pression constante de l'atmosphère et on le ramène à zéro, sa température initiale. Calculer le rendement de cette série d'opérations.*

$$\rho = \frac{Q-q}{Q},$$

$$Q = 1,293 \times 0,16858 \times 100.$$

A 100° la pression est devenue égale à $1^{atm},367$; elle tombe à 1^{atm} par la détente adiabatique, ce qui nous donne la tem-

pérature T′, consécutive à cette détente :

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{1}{1,367}\right)^{0,29},$$

$$T' = 340^{\circ},7 \text{ absolus} = 67^{\circ},7 \text{ C}.$$

La chaleur cédée q est donc égale à

$$q = 1,293 \times 0,23771 \times 67,7,$$

et il vient pour ρ

$$\rho = \frac{16,858 - 0,23771 \times 67,7}{16,858} = 0,05.$$

85. *Un gaz quelconque parcourt un cycle fermé quelconque, en produisant le travail* $\mathfrak{T}$; *quelle quantité de chaleur disparaîtra dans le parcours de ce cycle?*

$$dQ = c\,dT + Ap\,dv = c\,dT + \frac{C-c}{R}p\,dv.$$

Comme c est constant et le cycle fermé, nous aurons

$$Q = \frac{C-c}{R}\int p\,dv = \frac{C-c}{R}\mathfrak{T},$$

puisque $\mathfrak{T}$ est le travail effectué dans le cycle. Ce résultat pouvait être prévu *a priori*, attendu que

$$\frac{C-c}{R} = A.$$

86. *Un kilogramme d'air subit une série de transformations réversibles constituant un cycle de Carnot, entre les températures limites de* 0 *et de* 100° C. *Le volume initial est de* 1^{mc} *à la température de* 100°. *Le gaz se détend jusqu'à occuper* $2^{mc},718$ *à la même température, puis il subit une transformation adiabatique, etc. On demande de calculer la quan-*

tité de chaleur fournie au gaz à 100°, *et la quantité de chaleur qu'il dépose sur la source froide* (¹).

La chaleur fournie au gaz dans la première transformation isothermique est égale à

$$(23)\quad \begin{cases} Q = ART \log' \dfrac{v_2}{v_1} \\ \quad = \dfrac{1}{425} \times 29,272 \times 373 \log' 2,718 \\ \quad = \dfrac{1}{425} \times 29,272 \times 373 = 25^{cal},7. \end{cases}$$

Nous avons, d'autre part, en appelant q la quantité de chaleur transportée au réfrigérant,

$$\frac{q}{Q} = \frac{t}{T} = \frac{273}{373};$$

d'où

$$q = 18^{cal},8.$$

87. *Calculer le rendement des machines perforatrices Sommelier, dans lesquelles on utilise comme moteur l'air comprimé, en le faisant agir à pleine pression sur le piston de la machine.*

Comparons le travail $\mathcal{T}$ dépensé à comprimer de l'air, d'une pression p à P, et le travail $\mathcal{T}'$ recueilli par la poussée de l'air sur le piston ; p est la pression atmosphérique et par suite la contre-pression :

$$\mathcal{T} = RT \log' \frac{P}{p},$$

car cette compression se fait à température constante, dans un cylindre refroidi par un courant d'eau ;

$$\mathcal{T}' = \int p\,dv = (P - p)\,V,$$

(¹) Cette question a été posée aux examens de licence par la Faculté des Sciences de Paris, à la session de juillet 1887.

V étant le volume du gaz mis en œuvre;

$$= RT'\left(1 - \frac{p}{P}\right),$$

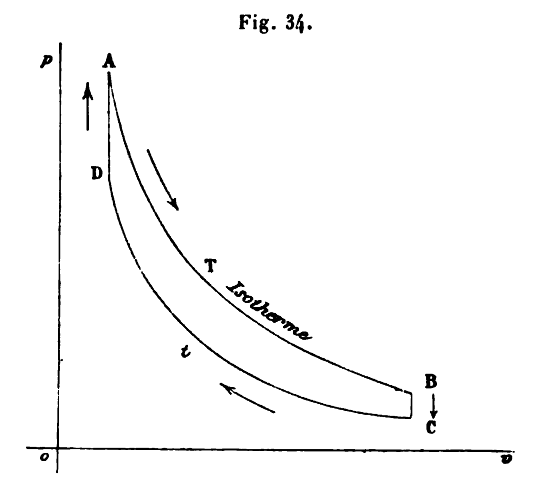
d'où

$$\rho = \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}} = \frac{T'\left(1 - \frac{p}{P}\right)}{T \log' \frac{P}{p}}.$$

T' est toujours moindre que T : l'abaissement de température deviendrait énorme, si l'on faisait de la détente. Il y aurait avantage à refroidir énergiquement l'appareil de compression, à réchauffer le cylindre de travail et à ne pas dépasser 2^{atm} de pression.

88. *Un foyer fournit de la chaleur à un gaz qui se détend suivant l'isotherme* AB (*fig.* 34), *et cette chaleur se transforme*

Fig. 34.



en travail extérieur; le gaz passe de la température T *à la température t suivant la ligne* BC, *parallèle à l'axe des pressions, sans changer de volume et, par suite, sans faire de travail. Une portion du travail produit est ensuite employée à*

comprimer le gaz, à température constante, le long de CD, *et le gaz cède alors de la chaleur au réfrigérant; enfin on revient à l'état initial par un réchauffement à volume constant, de t à* T. *Quel est le rendement de ce cycle?*

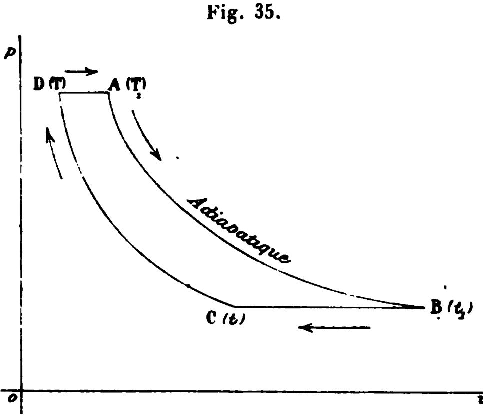
Le rendement de ce cycle est égal à celui de Carnot, attendu que le calorique est cédé et repris suivant deux isothermes, aux températures T et t et que BC et DA sont deux isodiabatiques. Nous avons donc

$$\rho = \frac{T - t}{T}.$$

C'est le cycle théorique de Stirling.

89. *Après avoir chauffé un gaz, à pression constante, de* T *à* T_1, *suivant* DA, *on le fait détendre sans perte ni gain de chaleur, de* A *en* B (*fig.* 35); *puis on achève de le refroidir.*

Fig. 35.



en lui enlevant le calorique nécessaire pour abaisser sa température de t_1 à t ; enfin on le ramène par une compression adiabatique à sa température initiale T *et à son état initial* D. *Calculer le coefficient économique de ce cycle.*

$$\rho = \frac{Q - q}{Q} = \frac{C(T_1 - T) - C(t_1 - t)}{C(T_1 - T)} = \frac{T_1 - T - (t_1 - t)}{T_1 - T}.$$

Or

$$\frac{T_1}{t_1} = \frac{T}{t}.$$

En effet, pour ce cycle fermé et réversible, nous avons

$$\int \frac{dQ}{T} = 0,$$

$$\int_T^{T_1} \frac{dT}{T} - \int_{t_1}^{t} \frac{dT}{T} = 0 \quad \text{et} \quad \int_T^{T_1} = \int_t^{t_1},$$

d'où

$$\frac{T_1}{T} = \frac{t_1}{t}.$$

Il vient donc

$$\rho = 1 - \frac{\frac{T_1 t}{T} - t}{T_1 - T} = 1 - \frac{T_1 t - Tt}{(T_1 - T)T} = 1 - \frac{t}{T}.$$

Ce rendement est manifestement moindre que celui du cycle de Carnot, dont la valeur serait $1 - \frac{t}{T_1}$: il lui deviendrait égal si l'on avait $T = T_1$, c'est-à-dire si le travail devenait nul, conséquence très remarquable, que nous retrouverons pour les moteurs électriques. Ces machines n'atteignent leur perfection qu'en cessant d'être.

90. *Dans les moteurs à gaz tonnant* (*fig.* 36) *du type primitif Lenoir, le gaz était chauffé à volume constant de t à* T, *suivant* AB, *puis détendu par l'adiabatique* BC *et enfin ramené à l'état initial* A *par un refroidissement à pression constante, le long de* CA (*fig.* 36). *Quel était le rendement de ces moteurs ?*

$$Q = c(T - t),$$
$$q = C(t' - t),$$

en appelant t' la température produite en C par la détente adiabatique.

$$\rho = \frac{c(T - t) - C(t' - t)}{c(T - t)} = 1 - \gamma \frac{t' - t}{T - t}.$$

Voici les calculs qui déterminent t' : soient P la pression en B et p celle en AC :

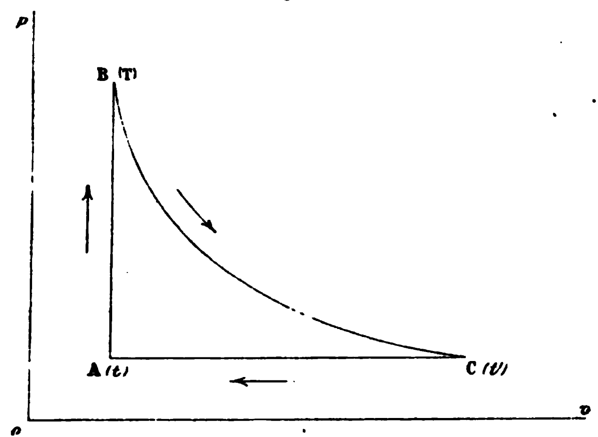
$$\frac{P}{p} = \frac{T}{t},$$

$$\frac{T}{t'} = \left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}};$$

d'où

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{P}{p}\right)^{1-\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{T}{t}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Fig. 36.



Donc

$$\frac{t'-t}{t} = \left(\frac{T-t}{t}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

91. *Les meilleurs moteurs à gaz tonnant sont à compression préalable. Le gaz, pris à la pression p, est comprimé à la pression π, ce qui élève sa température de t à θ; puis on l'échauffe de θ à* T, *sous volume constant, jusqu'en* B, *d'où une détente adiabatique le ramène à la pression initiale p. Mais sa température a baissé par le fait même et elle est de-*

venue égale à t'; il n'y a plus qu'à refroidir de t' à t pour fermer le cycle (fig. 37). Évaluer le rendement.

$$Q = c(T - \theta),$$

$$q = C(t' - t),$$

$$\rho = \frac{c(T - \theta) - C(t' - t)}{c(T - \theta)} = 1 - \gamma \frac{t' - t}{T - \theta}.$$

Fig. 37.

Nous aurons encore, comme dans l'exercice précédent,

$$\frac{\theta}{t} = \left(\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \quad \text{et} \quad \frac{T}{\theta} = \frac{P}{\pi};$$

de plus,

$$\frac{t'}{T} = \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}.$$

Nous en déduirons

$$\frac{t'}{t}\frac{\theta}{T} = \left(\frac{\pi}{P}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} = \left(\frac{\theta}{T}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}};$$

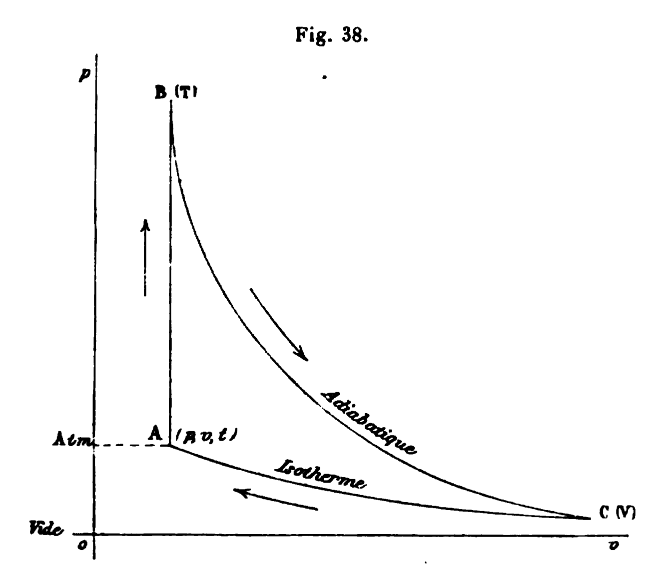
d'où

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{\theta}{T}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{T}{\theta}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$\frac{t' - t}{t} = \left(\frac{T - \theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

92. *Prenons dans l'atmosphère un volume v d'air, à la température t, et échauffons-le, à volume constant, de t à T : puis, opérons une détente adiabatique prolongée, qui amène l'air à occuper un volume V très considérable, comparativement au volume initial v ; fermons enfin le cycle par une compression suivant l'isotherme* CA. *Dans l'opération, le*

Fig. 38.



gaz a pris une pression très faible, inférieure à celle de l'atmosphère, laquelle effectue par sa réaction la compression CA : *c'est pourquoi on appelle ces machines* atmosphériques (*fig.* 38). *Déterminer leur coefficient économique.*

$$Q = c(T - t),$$

$$q = ARt \log' \frac{V}{v},$$

$$\rho = 1 - \frac{ARt \log' \frac{V}{v}}{c(T - t)}.$$

Mais

$$\frac{T}{t} = \left(\frac{V}{v}\right)^{\gamma - 1},$$

si nous appelons π la fraction de vapeur qui est restée à cet état, après la condensation partielle produite par la détente.

Dans la troisième période la vapeur se condense encore, au contact du réfrigérant, à la température t; admettons qu'il en reste une fraction π_1. La chaleur interne devient, à la fin de la compression,

$$U_1 = \int_0^t C\,dT + (\lambda_1 - Apu)\,\pi_1.$$

Il s'est produit du calorique par le fait de la compression : c'est $Apu(\pi - \pi_1)$ calories.

Le réfrigérant a donc reçu

$$q = U - U_1 + Apu(\pi - \pi_1).$$

Nous connaissons par conséquent ρ :

$$\rho = \frac{\lambda\pi - U + U_1 - Apu(\pi - \pi_1)}{\lambda\pi} = \frac{\lambda\pi - \lambda_1(\pi - \pi_1)}{\lambda\pi}.$$

Or

$$\frac{\lambda_1(\pi - \pi_1)}{t} = \frac{\lambda\pi}{T}$$

et

$$\lambda_1(\pi - \pi_1) = \lambda\pi\frac{t}{T};$$

d'où

$$\rho = \frac{1 - \frac{t}{T}}{T} = \frac{T - t}{T}.$$

C'est le rendement théorique maximum; le rendement générique d'une telle machine serait donc égal à l'unité.

94. *Dans la machine à vapeur réelle, la vapeur entre dans le cylindre à une température* T, *elle en sort à une température* t; *en négligeant toute action de paroi, inévitable pourtant, peut-on calculer le travail d'une cylindrée ?*

Le travail est mesuré par la variation de la chaleur interne U.

$$(35) \qquad \begin{aligned} U &= c\mathrm{T} + \lambda - \mathrm{A}pu = \mathrm{T} + \lambda - \mathrm{A}pu, \\ U_1 &= t + \lambda_1 - \mathrm{A}p_1\pi_1 u_1, \end{aligned}$$

π_1 étant la fraction de vapeur non condensée dans la détente.

Il vient donc

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \mathrm{J}[\mathrm{T} - t + (\lambda - \lambda_1)] - (pu - p_1\pi_1 u_1), \\ &= \mathrm{J}\Big[\mathrm{T} - t + (\lambda - \lambda_1)\Big] - \left(p\frac{1}{\delta} - p_1\pi_1\frac{1}{\delta_1}\right), \end{aligned}$$

en négligeant le volume v du kilogramme d'eau liquide.

95. *Résoudre le même problème pour un cylindre entouré d'une enveloppe de vapeur empêchant la condensation.*

Nous admettrons que le calorique transmis à travers la paroi suffise pour empêcher toute condensation; inutile de faire observer que nous envisageons ici un cas fictif.

Le travail n'est plus dès lors proportionnel à la variation de la chaleur interne, puisqu'il y a transmission de chaleur à travers la paroi : nous ignorons du reste quelle est la quantité de chaleur transmise de la sorte.

Mais nous pouvons représenter le travail par l'intégrale $\int p\,dv$, qu'il faut calculer pour le contour entier du cycle.

Nous aurons, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int p\,dv &= pv - \int v\,dp \\ &= pv - \int v\frac{dp}{d\mathrm{T}}d\mathrm{T} \\ &= pv - \left(\int u\frac{dp}{d\mathrm{T}}d\mathrm{T} + \int v_1\frac{dp}{d\mathrm{T}}d\mathrm{T}\right); \end{aligned}$$

si nous appelons v_1 le volume du kilogramme d'eau,

$$u = v - v_1.$$

Il vient donc une expression de la quantité de chaleur mise en œuvre; elle est égale à

$$A\int p\,dv = Apv - \left(\int A\,u\,\frac{dp}{dT}\,dT + \int A\,v_1\,\frac{dp}{dT}\,dT\right)$$

$$= Apv - \left(\int \frac{\lambda}{T}\,dT + A\,v_1 p\right).$$

Entre les limites T et t, entre lesquelles évolue le cycle, nous aurons donc

$$\mathfrak{T} = (p_1 v_1 - p_0 v_0) - J\int_T^t \lambda\,\frac{dT}{T} - v_1(p_1 - p_0).$$

L'intégrale $\int \lambda \frac{dT}{T}$ peut se calculer, car nous connaissons la fonction $\lambda = f(T)$.

LIVRE III.

ÉLECTRICITÉ ET MAGNÉTISME.

CHAPITRE I.

ÉLECTROSTATIQUE OU ÉLECTRICITÉ EN ÉQUILIBRE.

La plupart des corps, sinon tous, acquièrent par le frottement la propriété temporaire d'attirer les corps légers; cette propriété, qui a été découverte d'abord pour l'ambre (ἤλεκτρον), s'énonce en disant que les corps sont électrisés, c'est-à-dire semblables à l'ambre : le mot ne dit rien de plus.

Le degré d'électrisation d'un corps se mesure par l'action qu'il exerce; c'est ainsi que nous acquérons la notion de la charge. La charge d'un corps peut être égale à celle d'un autre ou à la somme des charges de deux ou plusieurs corps; elle est donc mesurable : ce résultat s'exprime sous une forme concise en disant qu'un corps électrisé est chargé d'une quantité mesurable et connue d'électricité de masse m. L'unité de quantité ou de masse est celle qui, agissant sur une quantité égale, placée à 1^{cm} de distance, exerce sur elle une force égale à une dyne. Telle est la définition de la masse électrique considérée comme quantité mathématique.

Les phénomènes électriques présentent un caractère de dualité qui nous oblige de distinguer des quantités positives d'électricité vitrée et négatives d'électricité résineuse. L'addition de deux charges égales et de signe contraire, $+m$ et $-m$, produit un état de non-électrisation représenté par zéro. Un corps à l'état neutre est virtuellement chargé de quanti-

tés égales et opposées de grandeur indéfinie : cette dernière hypothèse, absolument invraisemblable, s'impose néanmoins à nous, comme déduction légitime des précédentes, mais nous ne nous laisserons pas arrêter par cette difficulté, car nous verrons bientôt que les théories modernes de l'électricité sont indépendantes des opinions que l'on peut avoir sur la nature de l'électricité.

Pour nous, l'électricité est une grandeur, de nature inconnue, mais mesurable et dont l'action est connue : cela suffit pour édifier une théorie, qui est basée uniquement sur l'observation et l'expérience, et n'emprunte rien aux suppositions plus ou moins heureuses par lesquelles on a cherché à pénétrer le mystère de la nature de l'électricité. Il est vrai que nous conservons l'ancienne terminologie; bien que nous soyons assurés que l'électricité ne soit pas une substance, mais une manière d'être, nous parlons encore de fluide, nous lui prêtons une densité, nous évaluons l'épaisseur de ses couches, nous disons qu'il réside à la surface des conducteurs, qu'il se propage par contact, qu'il se distribue dans la masse des diélectriques, etc.; mais il ne faut voir dans ces mots que l'expression la plus simple de faits apparents observés ou calculés, absolument indiscutables, que la science constate en refusant de les interpréter.

Ces préliminaires devaient précéder l'exposé de la théorie de l'électricité en équilibre.

Cette théorie, que Sir William Thomson et Clerk Maxwell ont transformée, est entièrement basée sur la *loi de Coulomb* : l'action qui s'exerce entre deux masses élémentaires d'électricité m et m' est dirigée suivant la droite qui les joint; elle est proportionnelle au produit des masses en présence et en raison inverse du carré de leur distance :

$$f = \frac{mm'}{r^2}. \qquad (1)$$

Cette force satisfait à la définition des forces centrales.

L'action réciproque de deux corps électrisés, de dimensions finies, est la résultante des actions des masses élémentaires qui constituent leur charge.

L'espace dans lequel se fait sentir l'action d'un corps élec-

trisé s'appelle un *champ électrique* : on donne le nom de *ligne de force* aux lignes tangentes à la direction des forces du champ. Les lignes de force peuvent être courbes ([1]).

Pour déplacer une masse électrique dans un champ, on peut avoir à lutter contre les forces électriques, et il en résulte un travail; le travail nécessaire pour transporter l'unité de masse d'un point en un autre mesure la différence de *potentiel* de ces deux points. Le potentiel est une certaine fonction des coordonnées.

La valeur numérique V du potentiel en un point est exprimée par le nombre d'ergs nécessaires pour porter l'unité de masse positive depuis ce point jusqu'à l'infini, ou jusqu'à tout autre point dont le potentiel soit, comme à l'infini, égal à zéro.

On démontre encore que le potentiel V est égal à la somme des quotients obtenus en divisant chacune des masses agissantes sur le point considéré par leurs distances respectives à ce point :

$$\text{(2)} \qquad V = \sum \frac{m}{r}.$$

Soit un corps électrisé, dont la densité ρ d'un point intérieur est donnée : le potentiel dû à ce corps, en un point extérieur (x', y', r'), est

$$V = \int\int\int \frac{\rho}{r} dx dy dz,$$

formule dans laquelle

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;$$

il faut noter en outre que l'intégration est étendue à tout le volume du corps.

Un système électrique quelconque étant donné, le potentiel se calcule par une intégration analogue.

Le lieu des points du champ qui sont au même potentiel est une *surface de niveau;* les lignes de force lui sont normales. Les surfaces équipotentielles sont analogues aux lignes

([1]) Maxwell les appelle *lignes d'induction*.



de niveau en topographie, et les lignes de force, qui leur sont toujours normales, représentent les lignes de plus grande pente.

Une masse positive d'électricité, abandonnée à elle-même, marche vers les points où le potentiel est le plus faible, en suivant les lignes de force; c'est ainsi que l'eau coule le long des pentes. Mais une masse négative se dirige au contraire vers les hauts potentiels.

Le travail correspondant au déplacement d'une masse m d'un potentiel V_1 au potentiel V_2 est $m(V_1 - V_2)$ au signe près : la différence $V_1 - V_2$ est l'origine de la *force électromotrice*.

La *force électrique* en un point est égale et de signe contraire à la dérivée du potentiel par rapport à la normale à la surface équipotentielle du point :

$$F = -\frac{dV}{dn}; \tag{2 bis}$$

dn est compté sur la normale; dx étant compté sur un axe parallèle à l'axe des x, on aurait aussi

$$F_x = X = -\frac{dV}{dx}$$

et

$$F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2.$$

L'expérience et la théorie sont d'accord pour affirmer que, dans l'intérieur d'un conducteur en équilibre, la force est nulle; le potentiel y est donc constant, et c'est un volume de niveau, duquel les lignes de force émanent et auquel elles aboutissent normalement : c'est l'analogue d'un plateau en topographie.

Dans une sphère, le potentiel est celui du centre :

$$V = \frac{M}{R}.$$

Le potentiel de la Terre considérée comme réservoir commun est nul, car R est alors infini.

Une distribution s'étendant à toute la masse d'un corps n'est possible que pour un corps non conducteur.

On déduit sans peine d'une expérience célèbre de Faraday que l'on peut toujours remplacer une masse non conductrice, électrisée d'une manière quelconque, par une distribution fictive sur sa surface extérieure, correspondant à une même charge totale.

Considérons les lignes de force menées par le contour d'un élément dS, pris sur une surface de niveau; ce canal orthogonal constitue un *tube de force*. Soit F_n la force électrique normale à l'élément dS; le produit $F_n dS$ s'appelle le *flux de force*.

Gauss a démontré [1] que le flux total de force qui sort d'une surface fermée, tracée d'une manière quelconque dans un champ électrique, est égal à la quantité M d'électricité, contenue dans la surface, multipliée par 4π. Si M est égal à zéro, le flux est évidemment nul :

$$\int F_n dS = 4\pi M. \tag{3}$$

Laplace et Poisson ont formulé cet autre théorème :

La somme des trois dérivées secondes partielles du potentiel, par rapport à trois axes rectangulaires, est égale au produit, changé de signe, de 4π par la densité au point considéré.

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \Delta V = -4\pi\rho. \tag{4}$$

S'il n'y a pas d'électricité au voisinage du point, $\rho = 0$, et nous avons $\Delta V = 0$.

Enfin, nous devons à Coulomb cette proposition : *La force électrique en un point infiniment voisin d'un conducteur en équilibre est égale à la densité électrique σ dans le voisinage de ce point, multipliée par 4π.*

$$F = -\frac{dV}{dn} = 4\pi\sigma; \tag{5}$$

---

[1] On attribue souvent ce théorème à Green.

d'où

(6) $$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}.$$

Quand le potentiel est connu, on connaît donc aussi la densité électrique en un point déterminé.

On déduit encore de ce qui précède que la pression électrostatique p, rapportée à l'unité de surface, est égale à

(7) $$\frac{1}{8\pi}F^2 = 2\pi\sigma^2.$$

Ces importants théorèmes facilitent singulièrement l'étude de l'équilibre électrique d'un sytème de conducteurs : on en déduit des propositions générales qui se prêtent à de nombreuses applications. Citons comme exemple une relation due à Gauss : *Si l'on considère deux systèmes électriques, l'un formé de masses* m, *l'autre de masses* m', *donnant des potentiels* V *et* V′, *on a identiquement* $\int m V' = \int m' V$.

Pour des conducteurs quelconques, recouverts de masses M, M′, M″, ..., on aura par suite

(8) $$MV' + M_1 V'_1 + \ldots = M'V + M'_1 V_1 + \ldots.$$

La *capacité* d'un conducteur est la charge qu'il faut lui donner pour le porter à un potentiel égal à l'unité, quand tous les conducteurs qui l'entourent sont au potentiel zéro : la capacité d'un corps dépend donc de sa forme et de sa position :

(9) $$C = \frac{M}{V}.$$

Pour une sphère, C = R : mais sa capacité réelle est toujours plus grande, et, dans une salle de 4^m de côté, une sphère de $0^m,10$ de rayon a une capacité égale à 10,5.

L'influence des corps voisins modifie donc considérablement la capacité des conducteurs : c'est par ce fait que s'explique le fonctionnement des condensateurs, auxquels conviendrait bien mieux le nom d'*accumulateurs*.

La *force condensante* $\mathfrak{F}$ d'un condensateur est égale au rapport des charges que prend le collecteur, à égalité de potentiel,

lorsque le condenseur existe ou non; elle est donc égale au rapport des capacités du collecteur dans les deux cas.

$$(10) \qquad \mathfrak{F} = \frac{M'}{M} = \frac{C'}{C}.$$

On pourrait dire encore qu'elle est égale au rapport des potentiels que donne une même charge au collecteur, lorsqu'il est soustrait ou exposé à l'influence du condenseur.

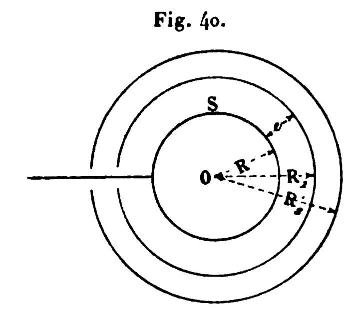
La capacité d'un condensateur est le rapport entre la charge du collecteur et la différence de potentiel $V_1 - V_2$ des armatures du collecteur et du condenseur :

$$(11) \qquad \gamma = \frac{M}{V_1 - V_2}.$$

Pour le condensateur sphérique de la *fig.* 40, de surface intérieure S, nous aurons

$$(12) \qquad \mathfrak{F} = 1 + \frac{R}{e} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{RR_1}{e} = \frac{R^2}{e} = \frac{S}{4\pi e}.$$

Fig. 40.



Tout condensateur fermé a la même capacité $\frac{S}{4\pi e}$.

La capacité d'un condensateur cylindrique par unité de longueur est

$$(13) \qquad \gamma = \frac{1}{2 \log' \frac{R_1}{R}}.$$

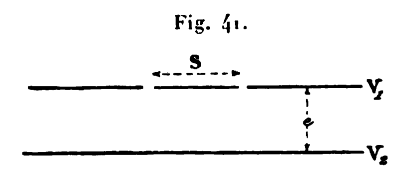
Pour un condensateur plan, on peut admettre aussi que $\gamma = \frac{S}{4\pi e}$, si l'on néglige l'influence perturbatrice des bords.

La capacité d'une batterie formée de n condensateurs, ayant chacun une capacité γ, est égale à $n\gamma$; celle d'une cascade, composée du même nombre de condensateurs, serait $\frac{\gamma}{n}$.

L'attraction qui s'exerce entre un plateau indéfini et une plaque parallèle d'étendue S, entourée d'un anneau de garde, à une distance e, les potentiels étant V_1 et V_2 (*fig.* 41), est égale à

$$P = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{V_1 - V_2}{e}\right)^2. \tag{14}$$

Fig. 41.



L'étude de l'influence réciproque de différents conducteurs présente le plus souvent des difficultés d'analyse insurmontables; mais Sir William Thomson a été conduit à des solutions généralement assez simples par la considération des images électriques. Un corps électrisé quelconque, extérieur à une sphère, peut ainsi être remplacé, au point de vue de l'influence, par un autre intérieur à la sphère, qui est *l'image* du premier : les deux points dont l'un est l'image de l'autre sont conjugués par rapport à la sphère. C'est par ce procédé qu'on démontre que la densité électrique σ en un point P (*fig.* 42) d'une sphère conductrice communiquant avec le sol et électrisée sous l'influence d'une charge m placée en A est en raison inverse du cube de la distance de ce point P au point A ou au point A′, image du premier par rapport à la sphère.

$$\sigma = \frac{R^2 - d'^2}{4\pi R}\frac{m'}{r'^3} = -\frac{d^2 - R^2}{4\pi R}\frac{m}{r^3}; \tag{15}$$

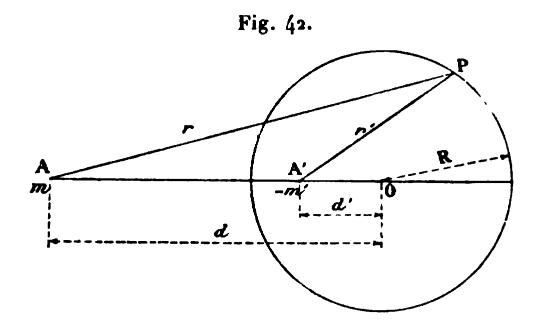
m' placé en A' peut remplacer m en A pour tous les points extérieurs : on a d'ailleurs

(15 *bis*) $$m' = m\,\frac{R}{d}.$$

Une sphère non isolée prendrait une charge m' sous l'influence du point A.

Un système quelconque de corps électrisés possède une énergie disponible qu'on peut évaluer, soit par le travail dé-

Fig. 42.



pensé dans l'électrisation, soit par le travail restitué dans la décharge; elle est proportionnelle au carré de la charge, ou au carré du potentiel :

(16) $$W = \frac{M^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}MV.$$

Pour une batterie de n bouteilles de Leyde identiques, de capacité γ, nous aurons

(17) $$W = JQ = \frac{1}{2}\frac{M^2}{n\gamma} = \frac{1}{2}n\gamma V^2.$$

Une cascade donnerait

(18) $$W = JQ = \frac{1}{2}\frac{nM^2}{\gamma} = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{n}V^2.$$

Quand on déplace un conducteur dans un système, l'énergie du système change ; si l'on maintient constants les potentiels

des différents conducteurs, l'énergie s'accroît d'une quantité égale au travail des forces électriques ; d'où ce théorème :

Le travail accompli par les forces électriques, lors du déplacement d'un système de conducteurs à potentiels constants, est égal à l'accroissement d'énergie du système.

Unités électrostatiques C.G.S.

L'unité de *quantité* est celle qui repousse une quantité égale, distante de 1^{cm}, avec la force d'une dyne :

$$f = \frac{m^2}{r^2}, \qquad m = rf^{\frac{1}{2}} = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

L'unité de *potentiel* est celle qui est produite par l'unité de quantité à la distance de 1^{cm} :

$$V = \frac{m}{r} = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Le travail dépensé pour élever une quantité m d'un potentiel V_1 au potentiel V_2 est égal à $m(V_2 - V_1)$.

L'unité de différence de potentiel ou de *force électromotrice* est le potentiel auquel il faut élever l'unité de quantité électrique pour dépenser un travail de 1 erg.

L'intensité du *champ* est la force qui agit sur l'unité de masse au point considéré : elle a pour dimensions

$$H = \frac{f}{m} = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Le *flux électrique*, qui est le produit de l'intensité du champ ou de la force par une surface, a pour dimensions

$$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

La *densité superficielle* est la quantité par unité de surface :

$$\sigma = \frac{m}{L^2} = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

La *capacité* d'un condensateur est le quotient de sa charge par la différence de potentiel de ses armatures;

$$C = \frac{m}{V} = L.$$

C'est une longueur.

L'unité de capacité est celle d'une sphère isolée de 1^{cm} de rayon.

Le *pouvoir inducteur spécifique* d'une substance isolante est le rapport de la capacité d'un condensateur, dont cette substance constitue le diélectrique, à celle d'un condensateur identique, dont l'air formerait le diélectrique. Sa dimension est zéro : c'est un nombre.

L'*intensité du courant* est la quantité d'électricité qui passe dans l'unité de temps :

$$I = \frac{m}{t} = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}.$$

L'unité de courant transporte l'unité de quantité par seconde.

CONSTANTES NUMÉRIQUES.

Pouvoirs inducteurs spécifiques (1).

Vide	0,9985
Hydrogène	0,9998
Air	1
Résine	1,8
Paraffine	2,0
Ébonite	2,3
Verre	2,6
Caoutchouc vulcanisé	2,8
Soufre	3,0
Gomme laque	3,3
Gutta-percha	3,4
Flint lourd	3,7
Mica	5,0

(1) Ces chiffres sont des moyennes; la plus grande discordance règne dans les résultats obtenus par les physiciens : ainsi Gordon a trouvé 2,46 pour la gutta-percha et Jenkin 4,20.

Distances explosives (Thomson).

Différence de potentiel.	Distance du conducteur.
	cm
2,30	0,0086
3,26	0,0127
4,26	0,0190
6,18	0,0408
8,15	0,0584
12,20	0,0904
13,95	0,1056
17,36	0,1325

Forces électromotrices électrostatiques.

Élément Daniell		0,00374
Élément Latimer Clark		0,00490
Contact	Cuivre-zinc	0,00253
	Fer-plomb	0,00145
	Platine-zinc	0,00331
	Laiton-étain	0,00126

APPLICATIONS.

1. *Le moment* C *du couple de torsion d'une balance de Coulomb est égal à* 16,13 *en unités* C.G.S. (¹); *la longueur* l *du levier mesure, depuis l'axe du fil jusqu'au centre de la boule mobile,* $10^{cm},2$; *les boules ont* 1^{cm} *de diamètre. Après électrisation au contact, on constate, à* 36° *de distance angulaire, une répulsion mutuelle équilibrée par une torsion* $T = (20 + 36) = 56°$. *Quelle est la charge des boules et leur potentiel, en unités électrostatiques* C. G. S. ?

L'équation d'équilibre est connue :

$$Fl \cos \frac{\alpha}{2} = CT.$$

(¹) Ce couple a été calculé, Livre I, Ch. III, problème 44, page 41.

Elle conduit à la valeur φ de la force à l'unité de distance;

$$\frac{\varphi l \cos\frac{\alpha}{2}}{4l^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{CT},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{45}\,\mathrm{C}l\mathrm{T}\sin\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\alpha}{2} = 64,58 \text{ dynes}.$$

Or nous avons

$$m^2 = \varphi,$$

d'où

$$m = 8,03$$

et

$$V = \frac{m}{r} = 16,06.$$

2. *On relie les boules d'une balance de torsion aux pôles positif et négatif d'une pile de Daniell de* 1200 *éléments, dont le milieu est à la Terre; les communications sont établies par des fils longs et fins de capacité négligeable. Le couple de torsion* $C = 4,10$ *en unités* C.G.S.; *la torsion préalable* β *est de* 36°; *les boules ont* 1cm *de rayon; la longueur* l *du levier mobile de l'aiguille est de* 20cm. *Calculer la distance angulaire* x *des boules dans la position d'équilibre stable.*

Le potentiel des boules est égal à

$$0,00374 \times 600 = 2,244 \text{ unités};$$

les charges positives et négatives sont $m = Vr = +2,244$ et $-2,244$. L'attraction φ des deux boules à l'unité de distance est donc égale à $m^2 = 5,036$ dynes.

Égalons les moments des forces antagonistes en présence : d'une part, nous avons $\frac{\varphi l}{l^2 x^2}$; de l'autre, le fil donne $C(\beta - x)$. Mais C est relatif à l'arc égal au rayon, et il faut multiplier l'angle $(\beta - x)$ par $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$.

Il vient donc

$$x^2(\beta - x) = \frac{\varphi}{Cl}\frac{180}{\pi} = 3,519;$$

d'où

$$(\alpha) \qquad x^3 - \beta x^2 + 3,519 = 0.$$

Vérifions d'abord la possibilité de l'équilibre dans les conditions du problème : il faut évidemment que la valeur maximum de l'attraction soit moindre que la valeur constante de la force de réaction du fil. Égalons à zéro la dérivée du premier membre de l'équation (α) par rapport à x : il vient

$$2x(\beta - x) - x^2 = 0,$$
$$x = \frac{2\beta}{3}.$$

La valeur de ce premier membre est dès lors

$$x^2(\beta - x) = \left(\frac{2\beta}{3}\right)^2 \frac{\beta}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{3}\right)^3,$$

et nous arrivons à l'équation de condition

$$\beta^3 > \frac{27}{4} \times 3,519 > 23,76,$$

laquelle est évidemment satisfaite.

On peut résoudre l'équation en x^3 par le moyen des Tables trigonométriques (¹) ou par une construction graphique.

1° Transformons d'abord l'équation (α), en posant

$$x = x' - \frac{\beta}{3} = x' + 1;$$

nous obtenons la relation

$$(\alpha') \qquad (x'+1)^3 - 3(x'+1)^2 + 3,519 = 0,$$
$$x'^3 - 3x' - 3 + 3,519 = 0,$$
$$x'^3 - 3x' + 0,519 = 0.$$

(¹) Cette méthode est connue; nous appliquons la solution, telle qu'elle est donnée dans le *Traité de Trigonométrie* de Serret, 5ᵉ édition, 1875, p. 84.

Cette équation a deux racines positives et une racine négative, les trois étant réelles et inégales, car nous avons

$$-4\times\overline{3}^3+27\times\overline{0,519}^2<0.$$

Nous calculerons un arc φ auxiliaire par la formule

$$\cos\varphi=\frac{\frac{-0,519}{2}}{\left(+\frac{3}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}=-0,259;$$

$$\varphi=(180^\circ-74^\circ 59' 21'')=105^\circ 0' 39'',$$

$$\frac{\varphi}{3}=35^\circ 0' 13''.$$

Les racines de l'équation (α') sont

$$x'_1=2\sqrt{\frac{3}{3}}\cos 35^\circ 0' 13''=2\cos 35^\circ 0' 13'',$$

$$x'_2=2\cos\left(120+\frac{\varphi}{3}\right)=2\cos 155^\circ 0' 13'',$$

$$x'_3=2\cos\left(240+\frac{\varphi}{3}\right)=2\cos 275^\circ 0' 13''.$$

La valeur de x'_1 répond seule à la question posée; nous avons donc

$$x'_1=1,64,$$

d'où

$$x=2,64=2^\circ 38' 24''.$$

2° Pour résoudre le même problème par une construction graphique, nous écrirons l'équation (α) sous la forme

$$(\beta-x)=\frac{3,519}{x^2},$$

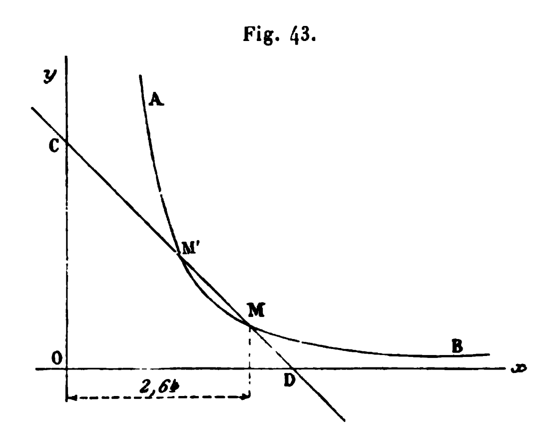
et nous construirons les deux courbes

$$y=\frac{3,519}{x^2},$$

$$y=(\beta-x)=3-x.$$

Les positions d'équilibre correspondent aux points d'intersection de ces deux lignes : la première AB (*fig.* 43) est une hyperbole ayant pour asymptotes l'axe des x et la partie positive de l'axe des y; la seconde CD est une droite inclinée à 45° sur les axes. Le point M est la solution cherchée ; M′ cor-

Fig. 43.



respondrait à un équilibre instable; la même construction donnerait un autre point sur l'autre nappe, qui serait la troisième solution de l'équation (α); mais sa valeur négative ne répondrait pas au problème.

3. *Biot électrisait tour à tour positivement et négativement les boules d'une balance de Coulomb, préalablement amenées au contact, et il observait les angles d'écart variable, qui mesuraient à chaque instant la charge des boules. L'expérience lui donna les résultats suivants :*

	Temps.	Angles.
	h m	° ′
Charge négative........	10.41	68 51
	12.25	34 39
Charge positive.........	1. 7	61 12
	2.25	35 33

Trouver la loi de déperdition des deux électricités.

Les torsions sont égales aux angles d'écart α. Nous avons d'abord

$$\varphi = 4Cl\alpha \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2},$$

puis

$$\varphi e^{-\mu t} = 4Cl\alpha' \sin\frac{\alpha'}{2} \operatorname{tang}\frac{\alpha'}{2},$$

d'où

$$e^{-\mu t} = \frac{\alpha' \sin\frac{\alpha'}{2} \operatorname{tang}\frac{\alpha'}{2}}{\alpha \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}},$$

$$-\mu = \frac{1}{t} \log' \frac{\alpha' \sin\frac{\alpha'}{2} \operatorname{tang}\frac{\alpha'}{2}}{\alpha \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}.$$

Effectuant ces calculs, nous trouvons les valeurs suivantes :

Électricité — :

$\mu = 0,02033$;

Électricité + :

$\mu = 0,02139$.

4. *Un électroscope de Henley est formé d'une boule mobile, pesant* $1^{gr},2$, *attachée au bout d'un fil de* 8^{cm} *de longueur ; quelle est la charge qui produira une déviation de* 30° (*fig.* 44) ?

$$\frac{\varphi \cos\frac{\theta}{2}}{4 l^2 \sin^2\frac{\theta}{2}} = p \sin\theta,$$

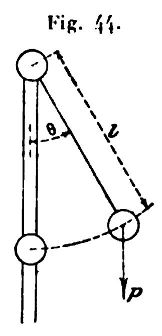
$$\varphi = 8 p l^2 \sin^3\frac{\theta}{2}.$$

Exprimons p en dynes et l en centimètres :

$$\varphi = 8 \times 1,2 \times 981 \times \overline{8}^2 \times \sin^3 15° = 10530 \text{ dynes.}$$

Or la force, exercée à l'unité de distance, est précisément égale au carré de la charge : donc $m = 102$ unités C.G.S.

Fig. 44.



Il est intéressant de noter que dans le cas de l'équilibre la tension du fil est

$$p\cos\theta + \frac{\varphi}{4l^2\sin\frac{\theta}{2}} = p\cos\theta + 2p\sin^2\frac{\theta}{2}$$
$$= p(\cos\theta + 1 - \cos\theta) = p;$$

elle est donc la même que lorsque la boule est à l'état neutre et que le fil pend verticalement le long de l'axe de l'électroscope.

5. *Une étincelle jaillit entre deux plateaux distants de* 1^{mm} ; *quelle est la différence de potentiel électrostatique ?*

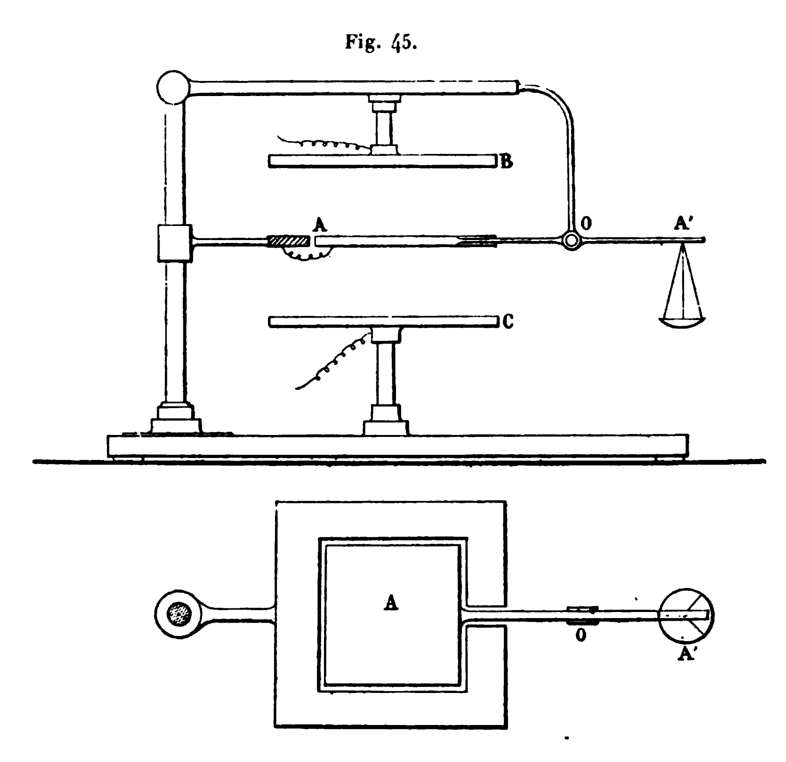
Par interpolation, nous déduisons des Tables données ci-dessus

$$V = 13,30.$$

6. *Un disque horizontal carré* A, *attaché à l'extrémité du fléau équilibré* AOA', *est au potentiel* $V = +10$ *unités électrostatiques ; il occupe le milieu de l'intervalle de deux disques* B *et* C *distants de* $2D = 6^{cm}$. *Sa surface* S *est de* 16^{cmq} ; *la distance du centre du disque au point de suspension du fléau est* $L = 12^{cm}$; *une plaque de garde entoure le disque.* B *et* C *sont maintenus par*

une pile aux potentiels constants $+V_1$ *et* $-V_1$ *égaux à* $+0,5$ *et* $-0,5$ *unités de potentiel électrostatique. On demande quel poids il faudra placer dans le plateau* A′, *à* 15cm *du centre* O,

Fig. 45.



pour maintenir le disque A *dans le plan de sa plaque de garde* (*fig.* 45).

L'attraction du disque C au potentiel $-V_1$ est, par unité de surface,

$$(14)\qquad \frac{(V+V_1)^2}{8\pi D^2};$$

la répulsion du disque B égale

$$\frac{(V-V_1)^2}{8\pi D^2}.$$

L'action résultante f par unité de surface est dès lors connue :

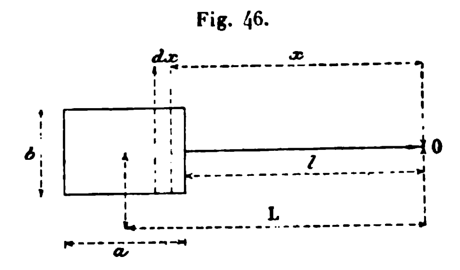
$$f = \frac{V^2 + V_1^2}{4\pi D^2}.$$

Soient

a la longueur du disque;
b sa largeur;
l sa distance au centre (*fig.* 46).

L'action exercée sur la tranche dx, située à la distance x de l'axe, est $fb\,dx$ et le moment est égal à $fbx\,dx$; intégrons

Fig. 46.



entre les limites de $x = l$ et $x = l + a$, pour calculer le moment des actions exercées sur le disque tout entier; nous aurons

$$\int_l^{l+a} fbx\,dx = fb\left[\frac{(l+a)^2}{2} - \frac{l^2}{2}\right]$$
$$= fba\left(l + \frac{a}{2}\right)$$
$$= fabL = fSL.$$

Le moment cherché a donc pour valeur

$$SL\,\frac{V^2 + V_1^2}{4\pi D^2} = \mathfrak{M} :$$

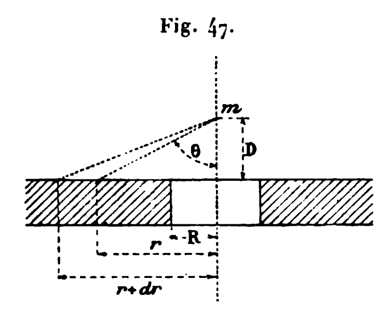
par suite de l'inégalité des deux bras du fléau, l'effort à exercer en A' pour maintenir le plateau dans le plan de la plaque de garde sera égal à $\frac{\mathfrak{M}}{15}$.

Tout calcul fait, nous trouvons

$$x = \frac{16 \times 12 \times (100 + 0,25)}{15 \times 4\pi \times 3^{-2}} = 11,346 \text{ dynes} = 11^{\text{mmg}},57.$$

7. *Quelle est l'action d'un conducteur plan de grandes dimensions, chargé uniformément, sur une masse m, placée à une distance* D *de sa surface, située sur la normale élevée par le centre d'une ouverture circulaire de rayon* R *percée dans le conducteur* (*fig.* 47).

Fig. 47.



Soient σ la densité superficielle de la couche qui recouvre le plateau et D la distance de la masse m au plan.

L'action d'une couche annulaire de rayons r et $r + dr$ est égale à

$$\begin{aligned} m\sigma \frac{2\pi r\,dr}{r^2 + D^2} \cos\theta &= m\sigma \frac{2\pi r\,dr}{r^2 + D^2} \frac{D}{\sqrt{r^2 + D^2}} \\ &= m\sigma 2\pi r\,dr \frac{D}{(r^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= m\sigma 2\pi D \frac{d}{dr}\left[-\frac{1}{(r^2 + D^2)^{\frac{1}{2}}}\right]. \end{aligned}$$

Intégrons entre les limites $r = R$ et $\frac{r}{D} = \infty$; il vient

$$-m\sigma 2\pi D\left[\frac{1}{(R^2 + D^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = -m\sigma 2\pi \frac{D}{(R^2 + D^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

L'action du conducteur eût été égale à $-m\sigma 2\pi$ s'il n'avait pas été percé de l'ouverture de rayon R; l'action du disque de rayon R est, d'autre part, égale à

$$m\sigma 2\pi D\left[\frac{1}{(R^2+D^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{D}\right].$$

8. *Weber ayant chargé une batterie à un potentiel connu. on opérait la décharge à travers un galvanomètre et un électrodynamomètre, par l'intermédiaire d'une corde de chanvre mouillée. Les déviations α du galvanomètre et α' de l'électrodynamomètre étaient*

79°,9 *et* 65°,6	*pour une longueur de corde égale à*			2^m,
76°,6 *et* 153°,0	»		»	1^m,
82°,3 *et* 293°,8	»		»	$0^m,5$.

En déduire la durée relative T *de la décharge dans ces trois cas.*

On sait que

$$\frac{\alpha^2}{\alpha'}=KT.$$

Pour $l=2$........ .... KT = 97,4
$l=1$............ KT = 38,3
$l=0,5$.......... KT = 23

La durée de la décharge augmente avec la longueur de la corde, mais elle ne lui est pas proportionnelle.

9. *On électrise un disque métallique par le contact répété d'un plateau d'électrophore, de même diamètre, ramené avant chaque opération à un potentiel déterminé et à une même charge égale à 120 unités. Quelle sera la charge du disque après 10 contacts effectués chaque fois entre les mêmes points?*

Soit m la charge du plateau; on peut admettre que celle du

disque sera égale à $\frac{m}{2}$ après le premier contact ; au deuxième contact, la quantité totale répartie sur l'ensemble des deux conducteurs est égale à

$$m + \frac{m}{2} = m\left(1 + \frac{1}{2}\right),$$

et le disque garde

$$\frac{1}{2}\left[m\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right] = m\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right];$$

il gardera au troisième contact

$$m\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right],$$

et au dixième contact

$$m\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^9\right]$$

$$= m\left[\frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}}\right] = m\,\frac{0,5 - 0,001024}{0,5}$$

$$= 120 \times \frac{0,498976}{0,5} = 119,75 \text{ unités.}$$

Un nombre infini de contacts aurait donné 120 unités ; notre calcul n'a, il est vrai, pas tenu compte de la déperdition.

10. *Étudier le champ électrique compris entre deux surfaces* A *et* B *conductrices, planes et parallèles, maintenues aux potentiels* V_1 *et* V_2 *et écartées d'une distance* D.

Nous supposerons ces surfaces de grandeur infinie, pour éviter l'influence perturbatrice des bords.

Le champ compris entre les surfaces est uniforme : le potentiel en un point est une fonction de sa distance z au plan A.

L'équation de Laplace donne, pour un plan distant de z du plan A,

$$(4) \qquad \frac{d^2 V}{dz^2} = 0;$$

intégrant entre les limites V_1 et V_2, il vient

$$V = V_1 + (V_2 - V_1)\frac{z}{D}.$$

Pour tous les points compris entre A et B, la force est normale aux plans :

$$F = \frac{V_1 - V_2}{D}.$$

Sur les conducteurs, l'électricité a une densité superficielle σ_A et σ_B facile à calculer :

$$4\pi\sigma_A = F = \frac{V_1 - V_2}{D}, \qquad \sigma_A = \frac{V_1 - V_2}{4\pi D},$$

$$4\pi\sigma_B = -F = \frac{V_2 - V_1}{D}, \qquad \sigma_B = \frac{V_2 - V_1}{4\pi D}.$$

11. *Un conducteur ellipsoïdal dont les axes sont égaux à 2^{cm}, 3^{cm} et 10^{cm} reçoit une charge de 25 unités; quelle est la densité superficielle à l'extrémité du grand axe?*

On admettra que la couche d'électricité est comprise entre deux surfaces ellipsoïdales, concentriques et homothétiques. Soient a, b et c les longueurs des trois demi-axes et $1 + \alpha$ le rapport de similitude des deux surfaces; nous savons que l'épaisseur en un point est proportionnelle à la distance respective des plans tangents aux deux points homologues et que, par suite, elle est égale à $p\alpha$, p étant la perpendiculaire abaissée du centre commun sur le plan tangent au point considéré.

Nous avons donc

$$\sigma = p\rho\alpha,$$

ρ étant la densité de la couche; donc la charge totale M est égale à

$$\tfrac{4}{3}\pi abc[(1+\alpha)^3 - 1]\rho = 4\pi abc\rho\alpha;$$

d'où

$$\sigma = \frac{M}{4\pi abc} p.$$

A l'extrémité du grand axe,

$$p = \frac{a}{2}, \qquad \sigma = \frac{M}{8\pi bc} = \frac{25}{37,7} = 0,66.$$

En tout autre point, on aurait

$$p = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

12. *Un plateau circulaire de* 10^{cm} *de diamètre reçoit une charge de* 25 *unités; on demande la densité superficielle à* 2^{cm} *du centre.*

On peut considérer les plateaux comme des ellipsoïdes de révolution très aplatis : faisons donc a très petit; il vient, en remplaçant $\frac{x^2}{a^2}$ par $1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$,

$$p = \frac{1}{\frac{1}{a}\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^4} y^2 + \frac{a^2 - c^2}{c^4} z^2}}$$

et

$$\lim \frac{p}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}}.$$

Posons $b = c$:

$$\sigma = \frac{M}{4\pi b^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

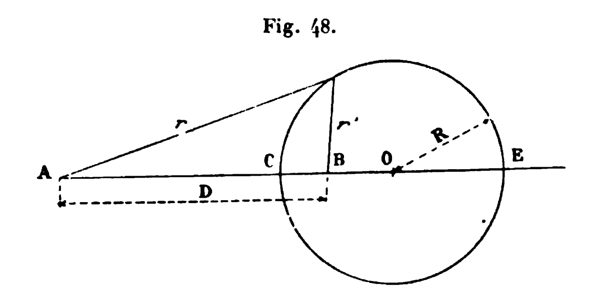
A une distance D du centre,

$$\sigma = \frac{M}{4\pi b} \frac{1}{\sqrt{b^2 - D^2}} = \frac{25}{68,83} \frac{1}{4,58} = 0,86.$$

Les lignes d'égale densité sont des cercles concentriques ; la densité est la moindre au centre, elle devient infinie sur les bords. Coulomb, Biot et Thomson ont vérifié l'exactitude de ces résultats de la théorie.

13. *Deux points électrisés sont à une distance* $D = 15^{cm}$; *l'un* A *a une charge* $+5$; *l'autre* B, *une charge* -1

Fig. 48.



(*fig.* 48). *On demande de déterminer la surface de niveau qui correspond au potentiel zéro.*

La surface cherchée a pour équation

$$V = 0 = \frac{m}{r} - \frac{m'}{r'},$$

si nous appelons $+m$ et $-m'$ les charges dont le rapport est égal à K, et r et r' les distances d'un point de la surface aux deux points A et B. C'est une sphère, attendu que le rapport des distances d'un quelconque de ses points à A et B est égal à K :

$$\frac{m}{m'} = \frac{r}{r'} = K.$$

Cherchons le rayon R de cette sphère.

A et B sont conjugués l'un de l'autre par rapport à cette sphère ; en effet, nous avons

$$K = \frac{AC}{BC} = \frac{AE}{BE} = \frac{AE - AC}{BE - BC} = \frac{2R}{2OB} = \frac{AC + R}{BC + OB} = \frac{AO}{R}.$$

Donc

$$R^2 = AO.OB.$$

Nous avons par suite aussi

$$K^2 = \frac{AO}{OB},$$

$$\frac{K^2 - 1}{1} = \frac{AO - OB}{OB} = \frac{D}{OB}.$$

Par conséquent,

$$AO = K^2 OB,$$

$$OB = \frac{D}{K^2 - 1},$$

$$AO = D\,\frac{K^2}{K^2 - 1},$$

$$R^2 = D^2\,\frac{K^2}{(K^2 - 1)^2},$$

$$R^2 = \overline{15}^2\,\frac{25}{\overline{24}^2} = 9^{cm},76.$$

14. *Étant donnés deux points* A *et* B, *distants de* $D = 6^{cm},2$, *chargés, le premier d'une quantité* $m = +1$, *le second d'une quantité* $m' = -2$, *trouver l'équation générale des surfaces équipotentielles et tracer leurs méridiennes.*

Le champ électrique, produit par les deux points A et B, est de révolution autour de l'axe AB : il n'y a lieu de s'occuper que des méridiennes des surfaces de niveau.

Leur équation est, d'une manière générale,

$$\frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{m'}{\sqrt{(x + D)^2 + y^2}} = \text{const.},$$

soit, dans le cas proposé,

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{2}{\sqrt{(x + D)^2 + y^2}} = 0 = 1 = 2 = 3 = \ldots.$$

La ligne au potentiel zéro est un cercle dont le rayon peut être calculé, car nous avons

$$R^2 = \overline{6,2}^2 \frac{4}{(4-1)^2} = \overline{6,2}^2 \frac{4}{9}$$
$$R = 4^{cm},1.$$

L'épure permet d'obtenir sans peine les surfaces équipotentielles successives -2, -1, 0, $+1$, $+2$, ... : il suffit de joindre par un trait continu les intersections des cercles de niveau des points A et B dont les potentiels ont une somme égale à -2, -1, 0, $+1$, $+2$, ... : on peut suivre les constructions sur la *fig.* 49.

En certaines régions, le nombre des points a été doublé, par intercalation de lignes intermédiaires dans le système.

15. *On donne deux points électrisés, possédant des charges $m = +1$ et $m' = +2$ et l'on demande de tracer les lignes de force du sytème des deux points.*

Figurons d'abord les lignes de force de chaque point isolément : ce sont des droites issues des centres, dont le nombre est proportionnel à la charge; leur direction est donnée par l'équation

$$2\pi(1-\cos\theta) = \frac{4\pi}{m} = 2\,\frac{4\pi}{m} = 3\,\frac{4\pi}{m} = \ldots = 4\pi,$$
$$1-\cos\theta = \frac{2}{m} = \frac{4}{m} = \frac{6}{m} = \ldots = 2.$$

On les construit graphiquement en divisant le diamètre d'un des cercles en nm parties égales, l'autre en nm' parties, en élevant des perpendiculaires par ces points et en joignant au centre les points d'intersection de ces ordonnées avec la circonférence . Numérotons les lignes par les chiffres 1, 2, 3 et 1', 2', 3', ... (*fig.* 50), en tournant en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre.

On obtiendra les lignes de force du système en reliant par un trait continu les points d'intersection des lignes de force 1, 2, 3 et 1', 2', 3', ..., de telle manière que la somme

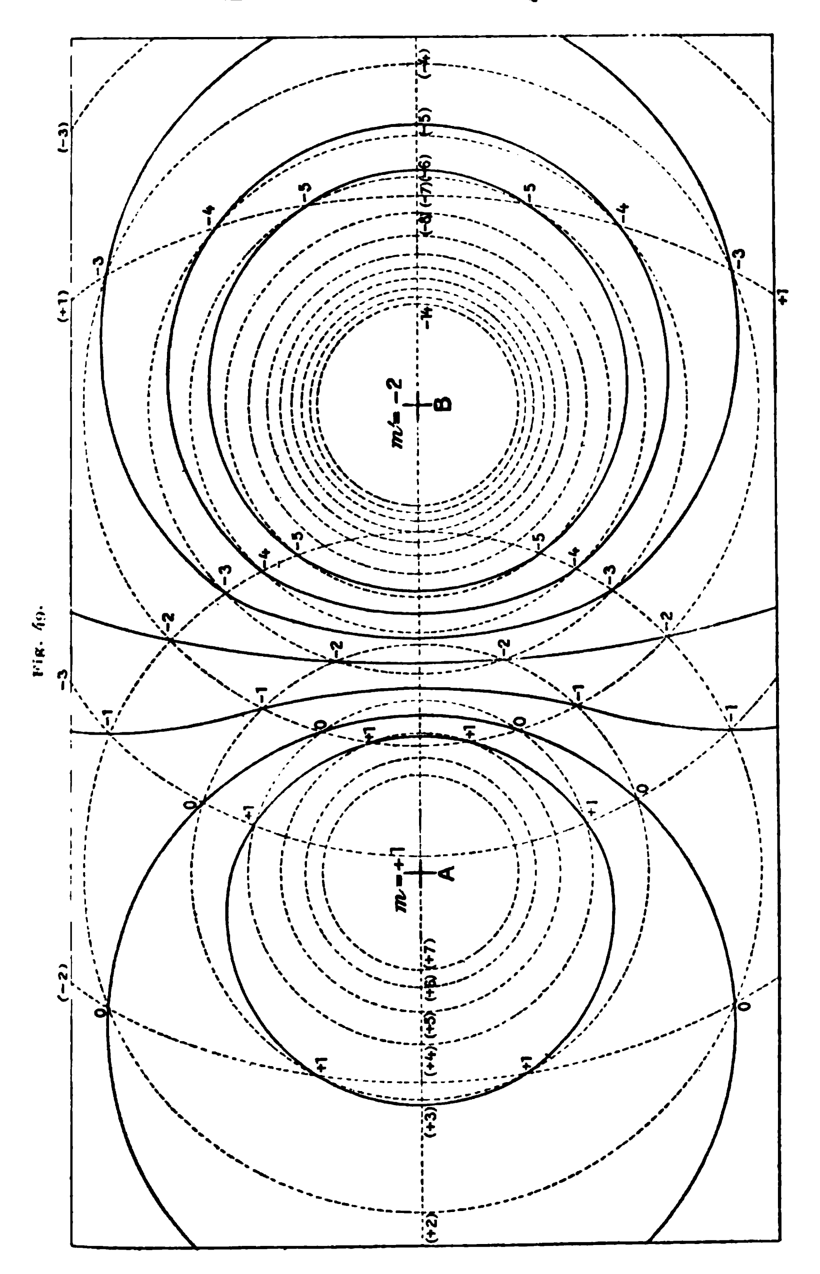


Fig. 49.

des notations soit toujours constante et égale à 2, 3, 4, 5, 6,....

L'équation de ces lignes est facile à déterminer : l'intersection de deux lignes numérotées n et n' donne un point de la ligne de force d'ordre N, et nous avons

$$N = n + n',$$

$$1 - \cos\theta = n\frac{2}{m},$$

$$1 - \cos\theta' = n'\frac{2}{m'},$$

$$m\cos\theta + m'\cos\theta' = m + m' - N;$$

d'où

$$\frac{mx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{m'(x+D)}{\sqrt{(x+D)^2}} = m + m' - N.$$

Ces lignes sont évidemment des trajectoires orthogonales des lignes équipotentielles.

16. *Deux conducteurs plans indéfinis, parallèles, sont à* $0^m,40$ *de distance; le premier a un potentiel* $+2°$, *le second a un potentiel* $-2°$. *On introduit entre ces plans une masse électrisée positivement, chargée d'une quantité* $m = +3$, *et on la place à* $17^{cm},5$ *du plateau chargé positivement. Étudier les déformations du champ uniforme produites par l'introduction de ce corps.*

Le champ primitif est uniforme; les surfaces de niveau sont équidistantes, et le potentiel croît d'une unité par centimètre de distance. L'équation générale des plans parallèles est

$$V = V_0 + \alpha x,$$

α étant le paramètre du champ.

Faisons l'épure de ce champ à demi-grandeur : l'unité de longueur adoptée pour le dessin sera donc égale à $0^{cm},5$.

Appliquons la méthode générale (*fig.* 51); les plateaux tombent en dehors du cadre de l'épure, mais la position du point correspond au potentiel du champ uniforme égal à $+2,5$, d'après les données du problème.

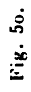


Fig. 50.

Les nouvelles surfaces équipotentielles ont chacune un plan asymptotique, parallèle au plateau : elles sont à une nappe et présentent une dépression dans l'axe du point. L'une d'elles offre un point conique et une nappe qui entoure le point. Étudions ces courbes. Prenons pour axe des x la direction des forces, pour axe des y une perpendiculaire quelconque à l'axe du champ (qui est de révolution) et plaçons l'origine des coordonnées au point électrisé. La présence du point augmente le potentiel d'un point quelconque xy de la quantité $\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et le potentiel définitif devient

$$V_1 = V + \frac{m}{\sqrt{x^2+y^2}} = V_0 + \alpha x + \frac{m}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Les surfaces de niveau ont donc pour asymptotes les plans $V = V_0 + \alpha x$.

En A, les deux lignes se coupent à angle droit, attendu que deux nappes d'une surface équipotentielle ne peuvent se couper autrement; il en résulte que le point double A est un point d'équilibre où la force résultante est nulle.

$$\frac{dV}{dx} = 0, \qquad \frac{dV}{dy} = 0,$$

$$\alpha - \frac{mx}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = 0, \qquad \frac{my}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = 0.$$

Résolvant ces équations, il vient :

$$y = 0, \qquad x = \sqrt{\frac{m}{\alpha}}.$$

Dans notre épure,

$$\alpha = \frac{1}{0,5} = 2.$$

Donc

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1^{cm},24.$$

C'est la distance Am sur l'épure.

De l'équation des lignes équipotentielles on passe à celles



Fig. 51.

des lignes de force, qui en sont les trajectoires orthogonales. L'équation des premières est

$$V_1 = V_0 + \alpha x + \frac{m}{\sqrt{x^2+y^2}} = \text{const.}$$

La condition $dV = 0$ nous donne une équation différentielle des lignes de niveau; on en déduit l'équation différentielle des lignes de force en changeant dx en dy et dy en dx :

$$0 = \alpha\, dy - \frac{m}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}(x\, dy - y\, dx),$$

On intègre en prenant pour variables y et $u = \frac{x}{y}$;

$$0 = \alpha y\, dy + \frac{m}{(\sqrt{1+u^2})^3}\, du,$$

$$\frac{\alpha y^2}{2} + m\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = C.$$

Cette élégante solution est due à M. Cornu.

Le tracé des lignes de force peut être obtenu par la méthode générale; faisons aboutir au point A un nombre de lignes de force égal au nombre d'unités qui composent la masse; puis, nous considérerons le champ uniforme comme de révolution autour de l'axe. Une surface de niveau plane sera coupée par une série de circonférences, comprenant entre elles des zones de surface constante, dont les rayons croîtront comme les racines carrées des nombres entiers consécutifs. On joindra par un trait continu les points pour lesquels la somme algébrique des indices est constante. Sur notre épure, nous avons intercalé des lignes intermédiaires pour multiplier les points de rencontre.

17. *Un point, possédant une charge m = — 12 (fig. 52), est placé entre deux conducteurs sphériques, élevés au potentiel + 12, ayant un rayon égal à 1cm,5 et des charges* M *et* M' *de* + 18 *unités : leur distance de centre à centre égale 9cm et le point occupe le milieu de la ligne des centres. On propose de dessiner les courbes de niveau et les lignes de force de ce système.*

On peut toujours remplacer une surface de niveau $V = K$ par une surface conductrice de même forme maintenue au même potentiel, et réciproquement, ce qui ramène le cas d'une sphère conductrice à celui d'un point, étudié ci-dessus. D'autre part, si l'on donne n points électrisés disposés en ligne droite, on fait d'abord le diagramme de deux points voisins et l'on réduit successivement à $n-1$, $n-2$, ... le nombre de diagrammes distincts : $n-1$ opérations fournissent donc le diagramme du système. C'est ainsi qu'a été obtenue l'épure de la *fig.* 52. On peut effectuer ces tracés sur une même feuille de papier ou bien se servir de feuilles de papier à calquer qu'on superpose pour déterminer les intersections des lignes par transparence.

Pour ne pas compliquer outre mesure notre dessin, qui est fait nécessairement à une très petite échelle, nous n'avons marqué qu'un petit nombre de lignes de force.

D'une manière générale, deux observations permettent de contrôler l'exactitude d'un dessin : 1° les deux systèmes des lignes équipotentielles et des lignes de force doivent être orthogonaux; 2° la distance des surfaces équipotentielles consécutives est à la distance des lignes de force consécutives comme la demi-distance à l'axe est à l'unité de longueur du tracé.

18. *En* A, *à une distance* $D = 10^{cm}$ *d'un conducteur plan indéfini non isolé* (*fig.* 53), *plaçons une masse chargée de* $m = 2$ *unités d'électricité positive : quelle est la densité au point* B?

Cherchons d'abord quelle est la densité en un point quelconque P, et pour cela, supposons qu'en A', symétrique de A par rapport au plan, il y ait une masse $-m$ (¹); le plan sera encore au potentiel zéro. La force F, exercée en P par m, est normale au plan et égale à

$$F = \frac{2m}{\overline{AP}^2}\cos\theta = 2D\frac{m}{\overline{AP}^3} = +4\pi\sigma.$$

(¹) A' est l'image de A par rapport au plan.

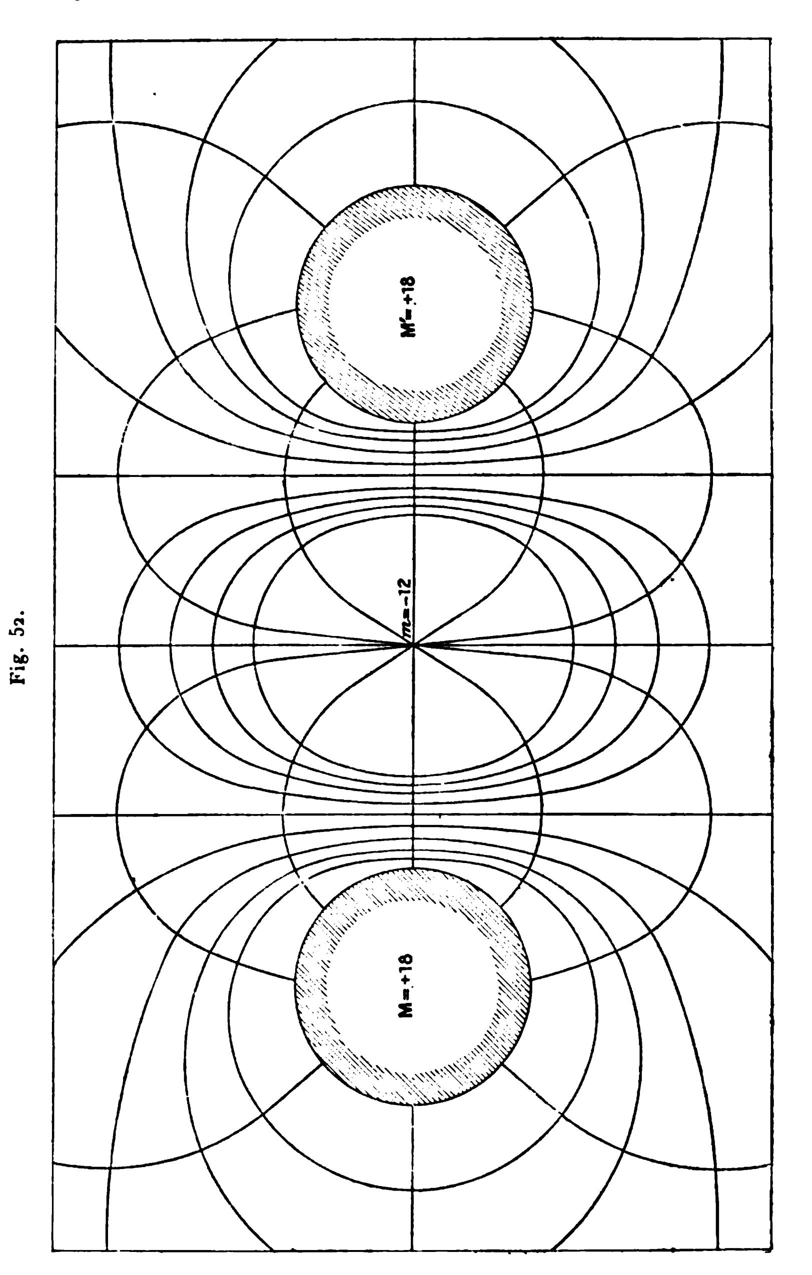


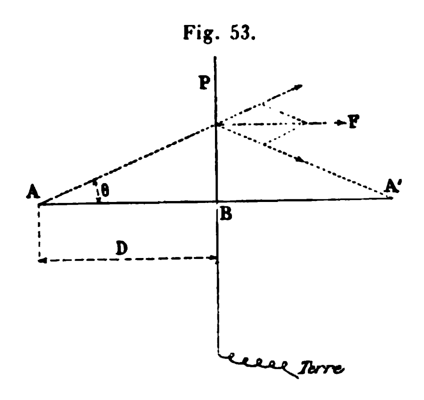
Fig. 52.

En B, nous aurons donc

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}\frac{m}{D^2}.$$

Supprimons la masse auxiliaire $-m$; le plan reste au potentiel zéro et les potentiels gardent leurs mêmes valeurs en

Fig. 53.



tous les points placés à la gauche du plan. La valeur de σ trouvée répond donc au problème.

$$\sigma = 0,0032 \quad (^1).$$

19. *Une sphère conductrice, isolée, de* 20^{cm} *de rayon, est à l'état neutre; on la soumet à l'influence d'une masse m électrisée positivement, et l'on demande de déterminer sur la sphère la position de la ligne neutre séparant la zone positive de la zone négative, sachant que la masse est à une distance* $d = 40^{cm}$ *du centre.*

Supposons d'abord la sphère non isolée; on sait que la densité est donnée en chaque point par la formule

$$(15) \qquad \sigma = -\frac{d^2 - R^2}{4\pi R}\frac{m}{r^3}.$$

---

(1) On arriverait au même résultat en appliquant la formule (15) mise sous la forme $\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{r+2R}{R}\frac{m}{r^2}$ et en y faisant R égal à l'∞.

La sphère est au potentiel zéro.

Pour obtenir l'état électrique que prendrait le conducteur, s'il avait été primitivement isolé et à l'état neutre, il suffit d'appliquer à sa surface une couche uniforme de quantité égale, mais de signe contraire, à la charge développée sur la sphère par l'influence du point. Cette charge est égale à $m\frac{R}{d}$ (15 *bis*). La charge totale du conducteur est dès lors nulle et le potentiel au centre de la sphère ne dépendra que de la masse agissante extérieure. Nous aurons, en effet,

$$V = \frac{m\frac{R}{d}}{R} = \frac{m}{d}.$$

La densité σ' de cette couche ainsi répartie sera

$$\sigma' = \frac{m\frac{R}{d}}{4\pi R^2} = \frac{m}{4\pi R d}.$$

La densité totale en un point sera donc

$$\begin{aligned} \sigma + \sigma' &= \frac{m}{4\pi R d} - \frac{d^2 - R^2}{4\pi R}\frac{m}{r^3} \\ &= \frac{m}{4\pi R}\left(\frac{1}{d} - \frac{d^2 - R^2}{r^3}\right). \end{aligned}$$

La ligne neutre de densité zéro sera un petit cercle perpendiculaire à l'axe, défini par la condition

$$d(d^2 - R^2) = r^3,$$

d'où

$$r = 26^{cm},34.$$

On déterminera sans peine à quelle distance x du point se trouve ce plan, car on a

$$r^2 = x^2 + R^2 - (d - r)^2$$

$$x = \frac{r + d^2 - R^2}{2d} = 31^{cm},5.$$

On pourrait constater encore que ce petit cercle est l'intersection de la sphère par la surface de niveau $V = \frac{m}{d}$.

Faisons observer toutefois que la position du cercle est indépendante de la grandeur m; elle varie avec d et R. Si le point reculait à l'infini, le petit cercle deviendrait un grand cercle de la sphère.

20. *On charge une sphère conductrice isolée au potentiel* V; *son rayon est* R. *Calculer la force répulsive f qui s'exerce entre les deux hémisphères.*

Par élément de surface ds, la pression électrostatique est égale à

(7) $$p = 2\pi\sigma^2 ds :$$

cette pression est dirigée normalement à la surface, donc suivant ses rayons; sa composante perpendiculaire au plan diamétral de séparation des deux hémisphères est

$$p_1 = 2\pi\sigma^2 ds, \qquad \cos\alpha = 2\pi\sigma^2 ds_1,$$

ds_1 étant la projection de l'élément ds sur le plan. La somme des composantes p_1 donne f, et nous avons

$$f = 2\pi\sigma^2\pi R^2 = 2\pi^2\sigma^2 R^2.$$

Mais

$$\frac{4\pi R^2\sigma}{R} = 4\pi R\sigma = V;$$

donc

$$f = \frac{V^2}{8}.$$

C'est ainsi que M. Lippmann a réussi à mesurer les potentiels en valeur absolue; un dispositif très ingénieux lui donne la valeur de f.

21. *Un ballon sphérique est incomplètement gonflé d'air et il occupe un volume de* 10^{lit}, *sous la pression normale de*

76^{cm} *de mercure à Paris, soit de* 1,014 *mégadyne par centimètre carré. On l'électrise au potentiel* 10 : *de combien augmentera le volume du ballon et quelle sera sa perte de poids?*

La pression électrostatique se retranche de la pression atmosphérique : la pression ambiante diminue donc et le volume du ballon augmente nécessairement. Calculons d'abord la pression électrostatique p.

Un ballon sphérique de 10^{lit} mesure 13^{cm},35 de rayon et 555^{cq},7 de surface.

Pour l'élever au potentiel 10, il faut 133,5 unités : la densité superficielle σ est pour lors

$$\sigma = \frac{133,5}{555,7} = 0,24 \text{ unités};$$

mais

(7) $$p = 2\pi\sigma^2 = 0,364 \text{ dyne}.$$

Donc la pression ambiante est égale à

$$1014000 - 0,364 = 1013999,636 \text{ dynes}.$$

Le volume devient

$$10. \times \frac{1014000}{1013999,636} = 10^{lit},00000035.$$

La poussée de l'atmosphère a donc augmenté du poids de 0^{lit},00000035 d'air, soit de

$$0^{gr},00000055 = 0^{gr},55 \times 10^{-6}.$$

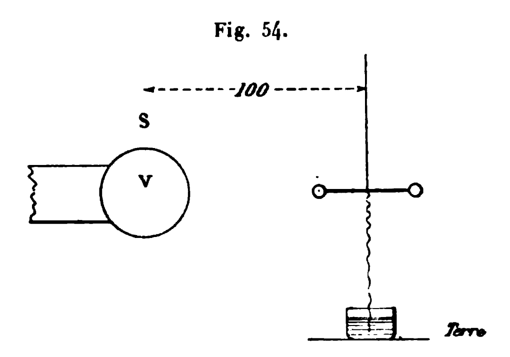
Il en résulte une diminution de poids insensible.

On voit qu'il faudrait électriser très fortement un ballon pour répéter l'expérience de Van Marum.

22. *Une sphère* S (*fig.* 54) *est au potentiel* V = 100 : *son rayon* R = 20^{cm}. *Une aiguille légère, conductrice, portant une balle de sureau métallisée de rayon* r = 0^{cm},5, *est suspendue* [illegible] *fil de cocon en face de cette sphère, à une distance*

$D = 100^{cm}$; *la demi-longueur de l'aiguille* $l = 5^{cm}$; *son moment d'inertie* I *est égal à* 12,3. *Un fil d'argent très fin, dont l'extrémité pend librement dans l'eau d'un vase conducteur*

Fig. 54.



posé sur le sol, met l'aiguille en communication avec la Terre sans paralyser ses mouvements : le couple de torsion du fil de cocon est négligeable. Calculer le nombre d'oscillations effectuées par l'aiguille par seconde.

Soit M la charge de la sphère et $-m$ celle de la balle de sureau, qui est influencée par la sphère sans exercer sur elle d'influence réciproque sensible; le potentiel de cette balle est égal à zéro, puisqu'elle communique au sol. Nous aurons donc

$$0 = \frac{M}{D} - \frac{m}{r},$$

$$m = \frac{M}{D} r.$$

Au centre de la sphère, le potentiel est V.

$$V = \frac{M}{R} - \frac{m}{D} = \frac{M}{R}\left(1 - \frac{Rr}{D^2}\right);$$

$$M = \frac{VR}{1 - \frac{Rr}{D^2}}.$$

La force qui s'exerce entre les deux centres est

$$F = \frac{Mm}{D^2} = M^2 \frac{r}{D^3} = \frac{r}{D^3}\left(\frac{VR}{1 - \frac{Rr}{D^2}}\right)^2$$

$$= \frac{V^2R^2r}{D^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{Rr}{D^2}\right)^2}.$$

Or, nous avons

$$n^2 = \frac{Fl}{I\pi^2} = \frac{l}{I\pi^2} \frac{V^2R^2r}{D^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{Rr}{D^2}\right)^2} = 0,0823,$$

$$n = 0,29.$$

L'aiguille fait environ $\frac{1}{3}$ d'oscillation par seconde.

Nous avons admis que la force F était appliquée exactement au centre de la balle de sureau ; en réalité, c'était à l'image du centre de la sphère par rapport à la balle ; mais, d'après les données du problème, ces points sont extrêmement voisins et ils peuvent être confondus.

23. *Deux points électrisés* A *et* A′ *possèdent chacun une charge positive de* 10 *unités électrostatiques ; ils sont placés à la distance de* 10cm, *et l'on propose de représenter la forme générale de la surface équipotentielle au potentiel* 4. *On suppose ensuite qu'un conducteur ait la forme et les dimensions de cette surface.*

On demande :

1° *Quelle sera sa capacité électrostatique ;*

2° *Quelles seront les densités électriques* σ *aux trois points de la surface situés sur la ligne* AA′ ;

3° *Quelle sera la pression électrostatique aux mêmes points* [1] ?

Dans ce système, formé de deux masses m égales et de

[1] Cette question a été posée par la Faculté des Sciences de Paris aux examens de licence, en novembre 1888.

même signe, situées à une distance $2d$, les courbes méridiennes des surfaces de niveau sont des espèces de lemniscates.

La surface, correspondant à

$$V = \frac{2m}{d} = 4,$$

a une méridienne en forme de ∞, dont le point nodal est placé à égale distance des points A et A′ : le potentiel est minimum en ce point relativement à l'axe AA′, alors qu'il est maximum par rapport au plan moyen de symétrie.

La capacité électrostatique de la surface est égale à

$$(9) \qquad C = \frac{2m}{V} = \frac{20}{4} = 5.$$

La densité aux pôles de la surface est celle de l'élément sphérique confondu avec elle en ces points :

$$\sigma = \frac{m}{4\pi r^2},$$

$$r = \frac{m}{V} = \frac{10}{4} = 2,5, \qquad \sigma = \frac{10}{4\pi 2,5^2} = 0,127.$$

Le point nodal est un point d'équilibre instable, où la force est égale à zéro : la densité y est nulle.

En tous ces points, la pression électrostatique est donnée par la formule (7)

$$p = 2\pi\sigma^2.$$

Aux pôles, $p = 0,80$.

Au nœud, p a évidemment une valeur zéro.

24. *Quelle est la capacité électrostatique d'un câble de* 1000 *nœuds de* 1852^{m}, *le rayon* R *du conducteur étant égal à* $0^{cm},4$, *et celui* R_1 *du diélectrique à* 1^{cm} ?

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} \gamma &= \frac{L}{2\log' \frac{R_1}{R}} = \frac{1852000}{2\log' 2,5} \\ &= 10,1 \times 10^5 \text{ unités de capacité.} \end{aligned} \right.$$

C'est, à peu de chose près, une capacité d'un microfarad, lequel est égal à 9×10^5 unités électrostatiques de capacité.

25. *Une sphère de* 25^{cm} *de rayon est au potentiel* 10; *un conducteur, amené au potentiel* 6, *est mis en communication lointaine avec cette sphère, et il prend un potentiel* 7; *calculer la capacité* C *du conducteur.*

$$10 = \frac{M}{25}, \qquad 6 = \frac{M}{C},$$

$$7 = \frac{250 + 6C}{25 + C},$$

$$C = 75.$$

On aurait encore pu écrire

$$C = 25\,\frac{10 - 7}{7 - 6} = 75.$$

26. *Gaugain a réalisé un appareil à double condensation, en accouplant deux condensateurs, dont on fait communiquer les armatures correspondantes pendant la charge; après avoir interrompu la communication avec la source, on écarte tour à tour les plateaux condenseurs des deux appareils. Quel est le bénéfice de cette combinaison et de cette manière de procéder, sachant que les deux condensateurs ont, le premier, un collecteur d'une capacité* 10, *le second un collecteur d'une capacité* 20, *et qu'ils possèdent tous deux une même force condensante égale à* 60 ?

Soit V le potentiel de la source; la capacité des deux condensateurs montés est de 10×60 et de 20×60, et la charge totale qu'ils prennent est égale à

$$V(600 + 1200) = 1800\,V.$$

Mais procédons comme l'a indiqué Gaugain : enlevons

d'abord le plateau condenseur du second condensateur; le potentiel du collecteur correspondant augmente et devient V_1, mais sa charge ne varie pas. Nous pouvons donc écrire

$$1800\,V = 10 \times 60\,V' + 20\,V' = 620\,V'$$

et

$$V' = \frac{180}{62} V = \frac{90}{31} V.$$

La charge du premier condensateur devient donc égale à

$$10 \times 60 \times V' = 10 \times 60 \times \frac{90}{31} V = 1742\,V.$$

Or, sans ce dispositif et ce mode opératoire, ce même condensateur n'aurait eu qu'une charge égale à

$$10 \times 60\,V = 600\,V.$$

Le bénéfice est donc égal à

$$\frac{1742}{600} < 2,9.$$

On aurait pu dire plus rapidement que la charge croissait avec le potentiel, dans le rapport de 90 à 31.

27. *M. Angot a employé comme étalon de capacité une sphère de rayon* R_1, *entourée par deux hémisphères de Magdebourg, dont le rayon intérieur était égal à* R_2. *On avait* $R_1 = 3^{cm},95$ *et* $R_2 = 6^{cm},2$. *Dire la capacité de l'étalon.*

$$C = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 10,9. \tag{12}$$

C'est la capacité de la sphère intérieure, qui se trouve soustraite à l'influence des murs environnants.

28. *Un condensateur d'Œpinus, à lame d'air, est formé de*

deux plateaux de 5^cm *de rayon distants de* 1^cm. *Déterminer sa capacité.*

$$(13\ bis) \qquad \gamma = \frac{R^2}{4e} = \frac{25}{4} = 6,25.$$

29. *Gaugain avait construit des condensateurs sphériques formés d'une sphère de* 6^cm, 15 *de diamètre, soutenue sur trois pieds de gomme laque dans l'intérieur de deux calottes hémisphériques, de* 8^cm, 9 *de diamètre intérieur. Une ouverture permettait d'attacher un fil à la sphère intérieure, et de réunir six de ces appareils en batterie ou en cascade : quelle était la capacité du condensateur ainsi formé ?*

La capacité de la sphère intérieure employée comme collecteur est

$$\frac{6,15 \times 8,9}{4} \frac{1}{1,38} = 9,95.$$

La batterie a dès lors une capacité égale à $6 \times 9,95 = 59,7$; celle de la cascade n'est que de $\frac{9,95}{6} = 1,66$.

30. *Calculer la force condensante* $\mathfrak{F}$ *d'un des condensateurs de Gaugain, selon que l'on met en communication avec le sol les hémisphères extérieurs, ou la sphère intérieure.*

La force condensante est égale au rapport des charges pour un même potentiel.

Nous avons d'abord

$$M = V\frac{R_1 R_2}{e},$$

$$m = VR_1,$$

$$\mathfrak{F} = \frac{M}{m} = \frac{R_2}{e} = \frac{R_1 + e}{e} = \frac{R_1}{e} + 1 = 3,22.$$

Mettons ensuite la sphère intérieure en communication avec le sol, l'armature extérieure jouera le rôle de collecteur.

Au potentiel V, sa face intérieure porte une charge $V(R_2 + \varepsilon)$. ε étant l'épaisseur des calottes hémisphériques, épaisseur négligeable ; la face intérieure reçoit $\frac{R_1 R_2}{e}$; par conséquent

$$M = V\left(R_2 + \frac{R_1 R_2}{e}\right) = VR_2\left(1 + \frac{R_1}{e}\right),$$

$$M = VR_2,$$

$$\mathcal{F} = 1 + \frac{R_1}{e} = 3,22.$$

La force condensante est donc la même dans les deux cas, quand on néglige l'épaisseur des hémisphères.

31. *Un condensateur à lame d'air et armatures planes a une capacité égale à* 10 ; *l'épaisseur de la lame d'air est de* 1^{cm}. *On introduit entre les deux plateaux, à égale distance de chacun d'eux, une feuille de tôle de* 1^{mm} *d'épaisseur ; que devient la capacité du condensateur ?*

La capacité était d'abord $\gamma = \frac{S}{4\pi e}$.

Soit e' la distance de la feuille de tôle aux plateaux ; nous avons formé deux condensateurs ayant chacun une capacité $\gamma' = \frac{S}{4\pi e'}$. Mais la lame interposée est chargée sur une de ses faces d'une quantité $+M'$, sur l'autre d'une quantité $-M'$; l'armature extérieure est au potentiel V, la feuille au potentiel V', et l'autre armature au potentiel zéro. Il vient donc

$$M' = \frac{(V - V')S}{4\pi e'} = \frac{V'S}{4\pi e'} = \frac{VS}{8\pi e'}.$$

Donc la capacité totale de l'appareil est devenue

$$\gamma'' = \frac{S}{8\pi e'},$$

$$\frac{\gamma''}{\gamma} = \frac{e}{2e'} = \frac{10}{10 - 1} = 1,11,$$

$$\gamma'' = 11,1.$$

La capacité a augmenté comme si l'on avait rapproché les armatures d'une quantité égale à l'épaisseur de la feuille de tôle.

32. *Le collecteur* A *d'un condensateur est amené au potentiel* V, *tandis que le second plateau* B *est relié au sol;* B *prend une charge* M. *Démontrer que, si l'on intervertit les rôles des plateaux,* A *étant mis au potentiel zéro et* B *au potentiel* V, A *prendra la même charge* M *qu'avait prise* B, *et cela quelles que soient les capacités* C *et* C' *des deux plateaux.*

Nous avons d'abord :

A au potentiel........	V	portant une charge....	$+M'$
B »	o	»	$-M$

Dans la seconde disposition, nous aurons :

A au potentiel.......	o	portant une charge....	$-x$
B »	V	»	$+x'$

Mais nous savons qu'en général on peut écrire

$$\Sigma m' V'' = \Sigma m'' V'. \tag{8}$$

Donc

$$-MV = -xV,$$

d'où

$$x = M.$$

Cette méthode générale nous aurait donné immédiatement la solution du problème 30; car, les charges étant les mêmes dans les deux dispositions, la force condensante doit garder la même valeur.

33. *Les deux plateaux d'un condensateur à lame d'air ont* 1^{mq} *de surface et ils sont à* $0^{cm},1$ *de distance; l'attraction qui s'exerce entre eux est de* 100^{gr}. *Calculer en unités* C.G.S. :

1° *La densité électrique sur chaque plateau;*

2° *Leur différence de potentiel;*

3° *La quantité de chaleur développée par la décharge. On négligera l'influence des bords, c'est-à-dire qu'on considérera chaque plateau comme indéfini et la charge comme uniforme* [1].

(7) $$1^\circ\ F = 2\pi\sigma^2 S,$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{981 \times 100}{2\pi \times 10000}} = 1{,}2639;$$

(14) $$2^\circ\ F = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{V_1 - V_2}{e}\right)^2,$$

$$V_1 - V_2 = e\sqrt{\frac{8\pi F}{S}} = 0{,}1\sqrt{\frac{8\pi \times 981 \times 100}{10000}} = 1{,}5702;$$

(17) $$\left\{\begin{aligned} 3^\circ\ W &= \frac{1}{2}\frac{M^2}{\gamma} = \frac{1}{2}\frac{M^2}{S}4\pi e = \frac{\sigma^2 S^2}{S}2\pi e \\ &= 2\pi\sigma^2 S e = Fe \\ &= 981 \times 100 \times 0{,}1 \\ &= 981 \times 10 \text{ ergs} \\ &= \frac{981 \times 10}{981 \times 10^5} = \frac{1}{10^4} \text{ kilogrammètres,} \end{aligned}\right.$$

$$Q = \frac{1}{10^4 \times 425} \text{ calories} = 2{,}353 \times 10^{-7} \text{ calories.}$$

En calories-grammes, nous aurions $Q = 2{,}353 \times 10^{-4}$.

34. *Un condensateur sphérique étalon, du type Gaugain (exercice* **29***), d'une capacité égale à* 9,95, *donne une déviation de décharge de* 40° *dans un galvanomètre approprié* [2]; *un autre condensateur, élevé au même potentiel par la même source, donne* 45° *de déviation : quelle est sa capacité ?*

$$\frac{x}{45} = \frac{9{,}95}{40};$$

$$x = 11{,}19.$$

[1] Cet exercice a été proposé par la Faculté des Sciences de Paris aux candidats à la Licence, à la session de novembre 1885.

[2] Le galvanomètre Thomson convient mieux que tout autre pour les faibles charges.

35. *Deux condensateurs sont élevés aux potentiels* + 10 *et* — 10; *on les décharge en les réunissant à travers un galvanomètre; une déviation de l'aiguille montre que les charges étaient inégales, puisqu'il y reste un résidu. Mais on constate, après un tâtonnement, que ce résidu serait nul, si le second condensateur était au potentiel* — 6,5. *En déduire le rapport de leurs capacités.*

$$M_1 = C_1 V_1,$$
$$M_2 = C_2 V_2.$$

Or

$$M_1 = M_2.$$

Donc

$$C_1 V_1 = C_2 V_2,$$
$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{6,5}{10} = 0,65.$$

36. *Une batterie de six jarres est chargée au potentiel* V; *on en approche une deuxième batterie de quatre jarres, identiques aux premières, et l'on réunit les armatures intérieures des deux batteries. Quelle est l'énergie du nouveau système par rapport au premier?*

Soit m la charge de chaque jarre au début de l'expérience: nous avons, pour n bouteilles,

$$W = \tfrac{1}{2} n m V. \qquad (16)$$

Après la réunion de la seconde batterie, formée de n' bouteilles, la charge nm s'est répandue sur $n + n'$ armatures et chaque jarre posède une quantité

$$m_1 = \frac{nm}{n + n'},$$

Mais

$$V_1 = \frac{m_1}{C} = \frac{nm}{C(n + n')} = V \frac{n}{n + n'}.$$

Donc

$$W_1 = \tfrac{1}{2}(n + n') \frac{nm}{n + n'} V \frac{n}{n + n'} = W \frac{n}{n + n'}.$$

L'énergie du second système est donc égale aux $\frac{6}{10}$ du premier, comme on eût pu l'affirmer *a priori*.

37. *Un condensateur, à lame d'air, dont les plateaux sont distants de* $1^{cm},5$, *a une capacité* C *égale à* 185 *unités : que deviendra cette capacité, si l'on rapproche les plateaux à* 1^{cm} *de distance et qu'on insère entre eux une lame de verre de* $0^{cm},8$ *d'épaisseur? Enfin, quelle serait la capacité* C_1 *de ce condensateur si les deux plateaux étaient collés contre une feuille de mica de* $0^{cm},1$ *d'épaisseur ?*

La capacité d'un condensateur à lame d'air, dont on considère les plateaux comme indéfinis en négligeant l'influence perturbatrice des bords (c'est le cas du problème), est en raison inverse de leur distance D : de plus, appelant γ le pouvoir inducteur spécifique d'une substance, on sait qu'une lame d'épaisseur e équivaut à une lame d'air d'épaisseur $\frac{e}{\gamma}$. Nous aurons donc

$$\frac{C'}{C} = \frac{D}{D' - e + \frac{e}{\gamma}}.$$

L'insertion de la lame de verre et le rapprochement des armatures donne par suite à l'appareil une capacité

$$C' = 185 \frac{1,5}{0,2 + \frac{0,8}{2,6}} = 185 \frac{1,5}{0,508} = 546.$$

Pour le mica, nous aurons

$$C_1 = 185 \frac{1,5}{\frac{0,1}{5}} = 185 \frac{1,5}{0,02} = 13875.$$

38. *Il faut une minute pour charger une batterie, de* 1000 *unités de capacité, au potentiel* 500, *à l'aide d'une machine de Carré : les poulies de M. Hirn, qui étaient en équilibre avec*

une charge de 100^{gr} *à vide, exigent une surcharge de* 150^{gr} *avec une vitesse des cordons de* 12^{m} *à la seconde. Quel est le rendement de ce dispositif* (*fig.* 55) ?

Fig. 55.

Le travail dépensé par seconde à la machine est de

$$12\left(\frac{0,150 - 0,100}{2}\right) = 0^{kgm},3.$$

Soit, par minute, 18^{kgm}.

Or l'énergie de la batterie est égale à

$$W = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}\,1000 \times \overline{500}^2 = 125 \times 10^6 \text{ ergs} = 1^{kgm},27.$$

Le rendement est donc égal à

$$\rho = \frac{1,27}{18} = 7 \text{ pour } 100.$$

39. *Les physiciens rapportaient généralement les unités électrostatiques au système fondamental du millimètre, force du milligramme et seconde : on demande de calculer les va-*

leurs de l'unité de quantité et de l'unité de potentiel de ce système en unités électrostatiques C.G.S.

Rappelons les équations de dimension

$$m = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1},$$

$$V = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Évaluons l'ancienne unité fondamentale en fonction de la nouvelle :

Le millimètre égale $0^{cm},1$.

La masse du premier système $= \frac{f}{g} = 9,81$ masses-gramme.

Nous trouverons par conséquent le coefficient par lequel il faut multiplier la première expression de la grandeur pour passer au système C.G.S. en portant dans les équations de dimension les valeurs des anciennes unités en fonction des nouvelles; il vient donc pour la quantité

$$\sqrt{\overline{0,1}^3 \times 9,81} = \sqrt{0,00981} = 0,09904.$$

Pour le potentiel,

$$\sqrt{0,1 \times 9,81} = \sqrt{0,981} = 0,9904.$$

L'ancienne unité est environ le dixième de l'unité de quantité C.G.S.; les unités de potentiel sont presque égales.

CHAPITRE II.

MAGNÉTISME.

Les phénomènes magnétiques ont une grande analogie avec les phénomènes électriques; mêmes lois d'attraction et de répulsion, même caractère de dualité dans les actions extérieures et par suite mêmes considérations de potentiel, de champs, de lignes de force, de tubes et de flux de force.

Un aimant est constitué par une série de masses magnétiques positives et négatives, dont la masse totale est nulle et qui sont distribuées suivant une certaine loi [1]. Cet aimant étant placé dans un champ uniforme, les actions exercées en ses différents points sont parallèles; elles ont, à chaque extrémité, une résultante égale à leur somme, parallèle à leur direction, appliquée au centre des masses de même signe. C'est ainsi qu'on définit les pôles des aimants; on leur applique les équations du centre des forces parallèles.

Le *moment magnétique* M est égal au produit $2ql$ des masses q, qu'on suppose accumulées aux pôles, par la distance $2l$ de ces pôles. Les moments magnétiques des aimants peuvent être composés, comme les forces, par la règle du parallélogramme : c'est ainsi qu'on détermine le moment d'un système d'aimants, en représentant chacun d'eux par une droite dirigée suivant son axe et de longueur proportionnelle à son moment.

La valeur du potentiel d'un aimant infiniment petit en un point extérieur est l'angle solide ω sous lequel on voit de ce

[1] D'après Biot, la courbe de distribution a pour équation $y = \mathrm{A}a^x$; x se compte à partir de l'extrémité du barreau; A est une constante dépendant de la nature de l'acier, tandis que a varie avec la trempe.



point une surface π égale au moment de l'aimant et perpendiculaire à l'axe de l'aimant en son milieu.

$$(1) \qquad V = \omega.$$

L'énergie de cet aimant est égale au flux total Q changé de signe qui traverse la surface π en pénétrant par la face négative.

$$(2) \qquad W = -Q = -\pi F_n.$$

On appelle *intensité d'aimantation* I en un point d'un aimant le rapport du moment magnétique d'un élément de volume pris en ce point au volume lui-même : c'est une grandeur géométrique définie par sa valeur numérique et sa direction.

$$(3) \qquad I = \frac{q\,ds}{dv}.$$

L'aimant est *uniforme* quand I est constant de grandeur et de direction.

La manière dont varie l'intensité d'aimantation permet de diviser les aimants en deux catégories : un aimant est *solénoïdal,* lorsqu'il est formé de filets à section constante, en chaque point desquels l'intensité d'aimantation est constante et dirigée dans l'axe du filet; l'aimant est *lamellaire* quand il peut être divisé en feuillets constitués par deux surfaces chargées de couches magnétiques égales, uniformes et de signes contraires.

Dans le premier cas, la distribution est tout à fait superficielle et il n'y a pas de magnétisme libre à l'intérieur du barreau; dans un aimant lamellaire, au contraire, il y a une densité superficielle σ et une densité cubique ρ : on a évidemment

$$\int \sigma ds + \int \rho dv = 0$$

et le potentiel est donné par la relation

$$(4) \qquad V = \int \frac{\sigma\,ds}{r} + \int \frac{\rho\,dv}{r}.$$

On démontre deux théorèmes importants relatifs aux feuillets :

1° Le potentiel d'un feuillet simple en un point extérieur est égal au produit de la puissance magnétique du feuillet $\Phi = h\sigma = h\mathrm{I}$ (¹) par sa surface apparente ω vue de ce point (théorème de Gauss)

$$V = \Phi\omega. \tag{5}$$

Corollaire. — Le potentiel est nul en un point si la surface apparente du feuillet y est nulle ; or, cette surface est nulle pour un feuillet fermé. L'action d'un feuillet formant une surface fermée est donc nulle.

2° L'énergie d'un feuillet est égale au produit changé de signe de la puissance Φ du feuillet par le flux de force Q qui pénètre par sa face négative.

$$W = \Phi Q. \tag{6}$$

Un corps magnétique, placé dans un champ magnétique, s'aimante dans la direction des lignes de force du champ : l'aimantation est proportionnelle à la résultante de toutes les forces magnétiques qui s'exercent en ce point. On appelle *coefficient d'aimantation induite* le rapport de l'intensité d'aimantation à la force magnétisante ; en d'autres termes, c'est le rapport de l'intensité d'aimantation I du barreau à l'intensité H du champ qui l'aimante. Sir William Thomson a donné à ce coefficient le nom de *susceptibilité magnétique ;* on l'écrit K et l'on a

$$K = \frac{I}{H} \quad \text{et} \quad I = KH. \tag{7}$$

Ce coefficient peut encore être défini de la manière suivante : c'est l'intensité d'aimantation prise dans un champ égal à l'unité par un cylindre infiniment mince placé parallèlement au champ.

Le magnétisme produit par l'influence du champ est dit

(¹) h est l'épaisseur du feuillet, σ la densité et I l'intensité superficielle : le produit $h\mathrm{I}$ est constant et égal à Φ.

magnétisme induit; l'action elle-même prend le nom d'*induction magnétique.*

L'induction magnétique satisfait à l'équation de Laplace pour tous les points, tant intérieurs qu'extérieurs aux milieux aimantés; elle se confond du reste avec la force magnétique pour tous les points extérieurs.

On a été amené à considérer des lignes, des tubes et des flux d'induction; on appelle *flux d'induction* au travers d'un élément de surface, le produit de la surface ds de l'élément par la composante normale de l'induction. Puisque l'induction satisfait à l'équation de Laplace pour tous les points extérieurs et intérieurs, on en conclut que le flux d'induction est une quantité constante dans toute l'étendue d'un tube d'induction. Le flux d'induction s'écrit Q comme le flux de force.

Si I est l'intensité d'aimantation et ds la section d'un filet, on a

$$(8) \qquad q = \mathrm{I}\,ds \quad \text{et} \quad \mathrm{Q} = 4\pi \mathrm{I}\,ds.$$

On peut encore envisager ces phénomènes d'une manière différente.

Un barreau, étant introduit dans un champ d'intensité H, est traversé par un flux de force plus considérable que celui qui traversait ce point du champ avant l'introduction du barreau : au lieu d'être Q, ce flux devient μQ. Or cette induction magnétique est liée à l'intensité du champ à l'intérieur du barreau; c'est une grandeur homogène avec l'intensité du champ et sa valeur est spécifique de la nature du barreau. Le rapport de cette induction magnétique à l'intensité primitive du champ s'appelle la *perméabilité magnétique :* c'est précisément μ (¹).

On a

$$(9) \qquad \mu = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{H}}.$$

(¹) Le coefficient de perméabilité magnétique μ exprime aussi le rapport des composantes normales de la force à l'intérieur et à l'extérieur du milieu considéré. La perméabilité a été comparée assez heureusement à une sorte de conductibilité des lignes de force.



μ est plus grand que l'unité pour les corps magnétiques et plus petit que un pour les corps diamagnétiques.

On démontre qu'il y a une relation exacte entre la susceptibilité et la perméabilité magnétiques :

$$\mu = 1 + 4\pi K.$$

Unités magnétiques C.G.S.

La quantité de magnétisme est définie par la loi de Coulomb : nous avons donc, comme en électrostatique,

$$q = rf^{\frac{1}{2}} = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \text{ (1)}.$$

Le moment M d'un aimant s'en déduit :

$$M = ql = L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

L'intensité de champ ou la force magnétique, la densité magnétique et le potentiel magnétique ont les mêmes dimensions que les grandeurs correspondantes dans le système électrostatique :

$$H = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} = \sigma,$$

$$V = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Dans un champ d'intensité H, une section S, normale à la direction des lignes de force, est traversée par un flux HS, dont la dimension est $L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$; ce flux est égal à $4\pi q$ quand il émane d'un pôle isolé d'intensité q. Le flux a donc les dimensions d'une quantité.

L'intensité d'aimantation $I = \frac{ql}{v} = \frac{q}{\omega}$, en appelant ω la section du barreau; on a

$$I = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Ce sont encore les dimensions de H.

(1) Nous écrivons q au lieu de m, pour distinguer la quantité magnétique de la quantité électrostatique.

La puissance magnétique d'un feuillet étant le produit de la densité superficielle par l'épaisseur, on a, pour ses dimensions,

$$L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

Ce sont les dimensions du potentiel, ce qui est évident par le théorème de Gauss. La puissance d'un feuillet et le potentiel ont, comme on le voit, les dimensions d'une intensité de courant dans le système électromagnétique.

CONSTANTES MAGNÉTIQUES.

Magnétisme terrestre (Paris, 1er janvier 1887).

Intensité horizontale	0,194
Intensité verticale	0,422
Intensité totale	0,464
Déclinaison occidentale	15°57′2″
Inclinaison	65°15′6″

Intensité totale (Everett).	Maximum, South Victoria	0,790
	Minimum, Sainte-Hélène	0,283

Intensité d'aimantation du globe terrestre...... 0,08

Valeurs diverses simultanées de l'intensité horizontale (*A. Witz*) :

Lille :	Solitude (fortifications)	0,186
»	Lesquin (6km de la ville	0,191
»	Faculté libre des Sciences; cour extérieure	0,183
»	» cour intérieure	0,190
»	Salles diverses (charpente et plancher en fer.	0,152 à 0,114

Intensité maximum d'aimantation I :

Fer parfaitement doux	1400 à 2500
Acier	780
Cobalt	800

Champ maximum étudié (Bidwell) : 1300 unités.
Dans l'entrefer des dynamos, l'intensité du champ dépasse 10 000 unités.
Induction spécifique maximum : 45000 unités (Ewing).

Coefficients d'aimantation induite (susceptibilité magnétique K) :

Fer doux.....................	33
Acier fondu recuit.............	23
Acier recuit..................	22
Fonte........................	23
Acier non recuit..............	17

APPLICATIONS.

1. *Une aiguille aimantée est suspendue par un fil métallique dont le couple de torsion est* C ; *placée d'abord dans le méridien, il faut une torsion* ω *pour la maintenir dans un plan faisant un angle* δ *avec le méridien. Quel est le couple directeur de l'aiguille ?*

$$C(\omega - \delta) = MH \sin\delta,$$

$$MH = \frac{C(\omega - \delta)}{\sin\delta}.$$

2. *On a compté* n' *et* n'' *oscillations de l'aiguille d'inclinaison et de déclinaison par seconde en un lieu; en un autre point du globe, on a observé* n'_1 *et* n''_1 *oscillations des mêmes aiguilles. Calculer le rapport des intensités du magnétisme terrestre aux deux stations.*

L'aimant est un pendule composé, auquel nous pouvons appliquer la formule connue

$$\frac{1}{n} = \pi \sqrt{\frac{I}{MH}},$$

dans laquelle I est le moment d'inertie ; on en déduit

$$H = K n^2.$$

Soient n et n_1 les nombres d'oscillations effectuées par une aiguille librement suspendue dans l'espace aux deux stations,

et H et H_1 les intensités du magnétisme : on pourrait écrire

$$\frac{H}{H_1} = \frac{n^2}{n_1^2}.$$

Mais les deux séries d'opérations nous ont donné

$$H \cos i = K n'^2, \qquad H \sin i = K n''^2,$$
$$H_1 \cos i_1 = K n_1'^2, \qquad H_1 \sin i_1 = K n_1''^2,$$

$$\frac{H^2}{H_1^2} = \frac{n'^4 + n''^4}{n_1'^4 + n_1''^4},$$
$$\frac{H}{H_1} = \sqrt{\frac{n'^4 + n''^4}{n_1'^4 + n_1''^4}} = \sqrt{\frac{n^4}{n_1^4}}.$$

3. *On fait osciller, dans deux champs magnétiques très intenses, deux petites aiguilles de fer doux; des nombres d'oscillations n et n_1, que l'on a comptées, déduire le rapport de l'intensité des champs.*

$$\frac{1}{n} = \pi \sqrt{\frac{I}{MH}}.$$

Les aiguilles doivent tout leur magnétisme à l'induction du champ : on a donc $M = \rho H$, et il vient

$$\frac{1}{n} = \pi \sqrt{\frac{I}{\rho H^2}};$$

d'où, en appelant H et H_1 les intensités des champs considérés,

$$\frac{H^2}{H_1^2} = \frac{n^2}{n_1^2}$$

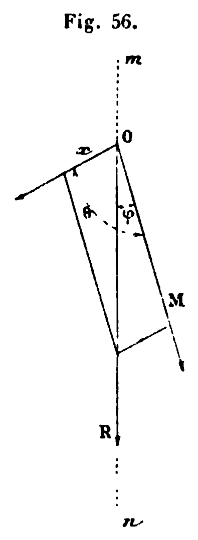
et

$$\frac{H}{H_1} = \frac{n}{n_1}.$$

4. *Deux aimants sont montés sur un équipage commun, leurs centres sur une même verticale, à une distance suffisante pour que leur influence réciproque puisse être négligée :*

ils font un angle $\theta = 15°$ entre eux. L'un d'eux, dont le moment magnétique M *est égal à* 29600 *unités* C.G.S., *fait un angle $\varphi = 3°$ avec le méridien; quel est le moment x de l'autre (fig. 56)?*

Fig. 56.



On voit facilement que l'on peut écrire

$$\frac{M}{\sin(\theta - \varphi)} = \frac{x}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin\theta}.$$

Donc

$$x = M\,\frac{\sin\varphi}{\sin(\theta - \varphi)} = 29600\,\frac{\sin 3°}{\sin 12°} = 7451.$$

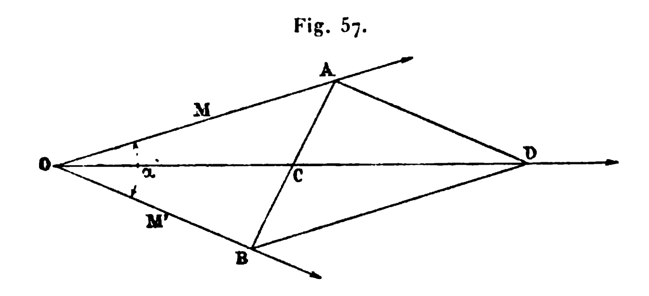
Si θ devenait égal à 90°, on aurait

$$x = M \operatorname{tang}\varphi.$$

5. *On donne deux aimants, dont les moments magnétiques sont* M *et* M′, *et on les applique l'un sur l'autre, en les croisant d'un angle α. Déterminer le nombre* N *d'oscillations effectuées par ce système dans un champ d'intensité* H *inconnue, sachant toutefois que l'une des aiguilles prise seule y ferait n oscillations.*

Représentons par les droites OA et OB (*fig.* 57) les axes magnétiques des deux aimants et prenons OA = M et OB = M′. Cela revient à remplacer les aimants proposés par des bar-

Fig. 57.



reaux identiques de longueur M et M′, ayant aux pôles des masses égales à l'unité. Mais on peut composer les moments magnétiques comme des forces et le système équivaut à un aimant unique ayant un moment μ égal à OD.

Or

$$\overline{\mathrm{OD}}^2 = \mu^2 = \mathrm{M}^2 + \mathrm{M}'^2 + 2\mathrm{MM}'\cos\alpha.$$

Il vient dès lors

$$\mathrm{N}^2 = \frac{\mu \mathrm{H}}{\mathrm{I}\pi^2}.$$

On déduit la valeur du coefficient d'inertie I de l'équation

$$n^2 = \frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{I}\pi^2};$$

d'où

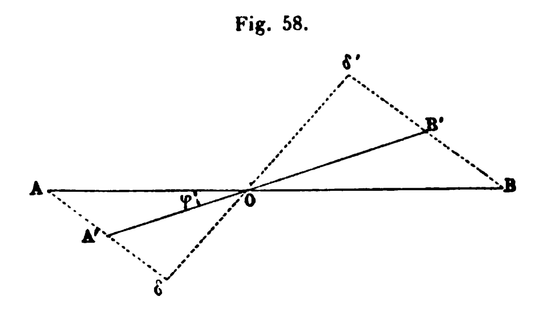
$$\mathrm{N}^2 = n^2 \frac{\mu}{\mathrm{M}}.$$

6. *Au-dessus d'une aiguille mobile, on dispose un barreau aimanté horizontal, dont le centre se projette sur l'axe du pivot de l'aiguille; d est la distance verticale des aimants, q et q' sont les quantités de magnétisme des pôles, $2l$ et $2l'$ les longueurs des aimants. On demande de calculer la valeur*

du couple horizontal qui tend à faire dévier l'aiguille mobile, l'écart initial étant φ.

Soient AB l'aimant fixe (*fig.* 58) et A_1B_1 l'aiguille montée sur le pivot; nous voyons en $A'B'$ la projection de cette aiguille mobile sur le plan horizontal : $AOA' = \varphi$.

Fig. 58.



A repousse A_1, B repousse B_1 avec une force

$$\frac{qq'}{\overline{AA_1}^2};$$

soient α l'angle de AA_1 avec sa projection AA' et $O\delta$ la distance de la direction de cette force à l'axe vertical commun des deux aimants. Les deux forces forment un couple horizontal dont le moment est égal à

$$\frac{2qq'}{\overline{AA_1}^2}\cos\alpha . O\delta.$$

Mais

$$AA' = AA_1 \cos\alpha,$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{AA'}{AA_1}.$$

On a de plus, dans l'espace et dans le plan,

$$\overline{AA_1}^2 = d^2 + \overline{AA'}^2 = d^2 + l^2 + l'^2 - 2ll'\cos\varphi.$$

Enfin

$$O\delta = \frac{ll' \sin\varphi}{AA'}.$$

La valeur du moment se présente dès lors sous la forme suivante :

$$\frac{2qq'}{\overline{AA_1}^3} AA' \frac{ll' \sin\varphi}{AA'} \quad \text{ou} \quad \frac{2qq' ll' \sin\varphi}{(d^2 + l^2 + l'^2 - 2ll' \cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Des calculs analogues nous conduiront à la valeur du moment des forces attractives AB_1 et BA_1 ; les mêmes considérations interviendront, mais nous trouverons

$$\overline{AB_1}^2 = d^2 + \overline{AB'}^2 = d^2 + l^2 + l'^2 + 2ll' \cos\varphi,$$

et le moment de ces forces sera égal à

$$- \frac{2qq' ll' \sin\varphi}{(d^2 + l^2 + l'^2 + 2ll' \cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le moment du couple total sera donc, en remplaçant $2qq'll'$ par le produit $\frac{MM'}{2}$ des moments des deux aimants,

$$\frac{MM' \sin\varphi}{2} \Big[(d^2 + l^2 + l'^2 - 2ll' \cos\varphi)^{-\frac{3}{2}} + (d^2 + l^2 + l'^2 + 2ll' \cos\varphi)^{-\frac{3}{2}} \Big].$$

Pour un angle φ suffisamment petit, on aura

$$\frac{MM'}{2} \sin\varphi \left\{ [d^2 + (l - l')^2]^{-\frac{3}{2}} + [d^2 + (l + l')^2]^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

ou, approximativement,

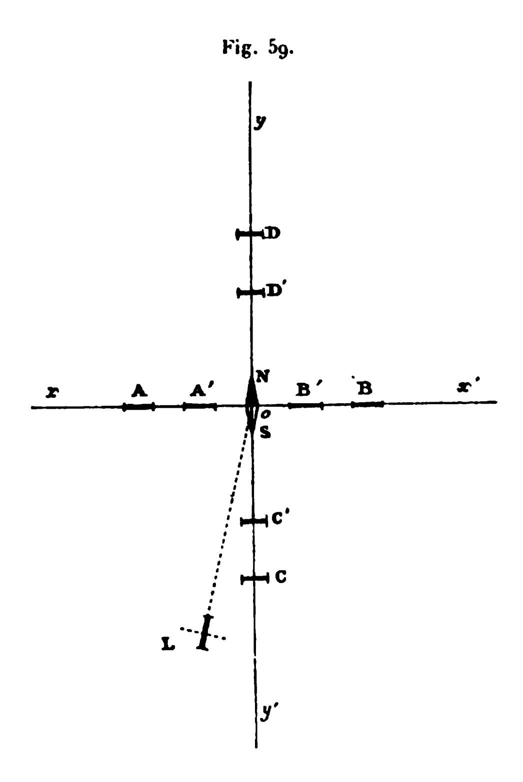
$$\frac{MM'}{2} \sin\varphi [2d^{-3} - 3d^{-5}(l^2 + l'^2)].$$

Une valeur de φ égale à $\frac{\pi}{2}$ aurait donné

$$MM'(d^2 + l^2 + l'^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

7. *Un aimant a un moment d'inertie* I *égal à* 138756420 *unités de Gauss; il exécute une oscillation en* $7^s,917$ *à Lille. Cet aimant, occupant successivement les positions* A, A', B, B', C, C', D *et* D' *dans le plan de l'aiguille* NS (*fig.* 59) *dévie cette aiguille d'angles* φ *et* φ' *égaux à* 10° 18' *et* 21° 30', *à des*

Fig. 59.



distances R *et* R' *égales à* 40^{cm} *et* 30^{cm}. *On demande de calculer l'intensité absolue du magnétisme terrestre à Lille en unités* C.G.S.

La méthode des oscillations nous donnera d'abord le moment magnétique MH du barreau :

$$MH = \pi^2 \frac{I}{t^2} = \pi^2 \frac{138756420}{7,917^2} = 22284735.$$

L'expérience de Gauss nous fournit $\frac{M}{H}$:

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2} \frac{R^3 \operatorname{tang}\varphi - R'^3 \operatorname{tang}\varphi'}{R^2 - R'^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\overline{400}^3 \operatorname{tang} 10^\circ 18' - \overline{300}^3 \operatorname{tang} 21^\circ 30}{\overline{400}^2 - \overline{300}^2} = 6230868;$$

d'où

$$H = \sqrt{\frac{22284735}{6230868}} = 1,891.$$

Ce résultat est calculé en fonction des unités de Gauss, millimètre, masse du milligramme et seconde : il faut passer aux unités C.G.S.

Or, l'intensité du champ a pour dimensions

$$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Appliquons aveuglément la règle, et évaluons d'abord les anciennes unités en fonction des nouvelles;

$$L = 0,1 \text{ centimètre},$$
$$M = 0,001 \text{ masse du gramme}.$$

Le coefficient de multiplication sera

$$\sqrt{\frac{M}{L}} = \sqrt{\frac{0,001}{0,1}} = \frac{1}{10}.$$

Donc

$$H = 0,189 \text{ unités C.G.S.}$$

8. *Une aiguille aimantée fait avec le méridien magnétique un angle φ, quand on la porte dans le champ supposé uniforme d'un puissant électro-aimant; le nombre de ses oscillations, qui était de n_0, passe à n par seconde; quel est l'angle δ du champ avec le méridien et son intensité* F?

On a

$$\frac{F}{\sin\varphi} = \frac{H}{\sin(\delta - \varphi)} = \frac{R}{\sin\delta},$$

en appelant R la résultante des forces F et H; de plus,

$$\frac{R}{H} = \frac{n^2}{n_0^2}.$$

On en déduit

$$\sin\delta = \frac{R}{H}\sin(\delta - \varphi) = \frac{n^2}{n_0^2}(\sin\delta\cos\varphi - \sin\varphi\cos\delta),$$

d'où

$$\frac{n_0^2}{n^2} = \cos\varphi - \sin\varphi\cot\delta,$$

et enfin

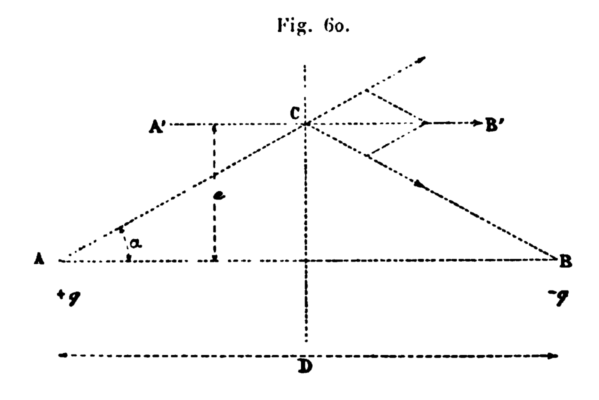
$$\cot\delta = \cot\varphi - \frac{n_0^2}{n^2}\frac{1}{\sin\varphi}.$$

Nous avons donc

$$F = H\frac{\sin\varphi}{\sin(\delta - \varphi)}.$$

9. *En* A *et* B *se trouvent deux masses magnétiques égales et de signe contraire* $+q$ *et* $-q$; *elles sont à une distance variable* D (*fig.* 60). *A quelle valeur de* D *correspond le maximum d'action en* C, *ce point étant situé sur la perpendiculaire élevée sur le milieu de* AB, *à une distance e de cette droite?*

Fig. 60.



L'action du pôle A est égale à $\frac{q}{\overline{AC}^2}$; sa composante parallèle à AB est $\frac{q}{\overline{AC}^2}\cos\alpha$, soit

$$\frac{q}{\overline{AC}^2}\,\frac{D}{2.AC} = \frac{q.D}{2\,\overline{AC}^3} = \frac{qD}{2\left(e^2+\frac{D^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'action $\frac{-qD}{2\left(e^2+\frac{D^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$ du pôle B s'ajoute à la première, et l'action totale est égale à

$$\frac{qD}{\left(e^2+\frac{D^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le maximum de l'action s'obtient en égalant à zéro la dérivée de cette fonction : il vient

$$\frac{\left(e^2+\frac{D^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}D^2\left(e^2+\frac{D^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(e^2+\frac{D^2}{4}\right)^3} = 0;$$

d'où

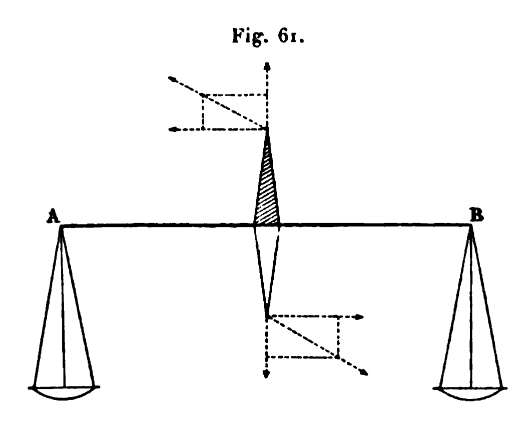
$$e^2+\frac{D^2}{4}-\frac{3}{4}D^2=0,$$

$$D = e\sqrt{2} = 1,414e.$$

10. *M. Tœpler fixe une aiguille aimantée au fléau d'une balance orientée dans le méridien, d'abord verticalement (fig. 61), le centre de l'aimant coïncidant avec le centre du fléau, puis horizontalement, et il équilibre par une tare l'action de la Terre dans les deux cas; il retourne alors l'aimant bout pour bout et il constate qu'il faut ajouter un poids* P *dans la première expérience,* P′ *dans la seconde, pour rétablir l'horizontalité*

du fléau. Déduire de ces observations la valeur de l'inclinaison, sachant que P = 0gr,181, P′ = 0gr,417.

Fig. 61.



Dans la première opération, la composante horizontale H intervient seule, et nous avons

$$MH = \frac{1}{2} Pl.$$

L'aiguille étant placée horizontalement, nous écrirons

$$MV = \frac{1}{2} P'l;$$

d'où

$$\frac{V}{H} = \text{tang}\, i = \frac{P'}{P} = \frac{417}{181},$$

$$i = 66^\circ 32' 12''.$$

Remarquons que P et P′ sont exprimés en dynes dans les deux équations en H et en V, mais qu'il suffit de faire le rapport des poids en grammes pour déterminer tang i.

11. *Deux aimants, dont les moments magnétiques sont* M *et* M′, *sont montés parallèlement en opposition sur un même équipage pour former un système astatique. Au repos, l'aiguille supérieure fait un angle* α *avec le méridien; quel est l'angle* ε *des deux axes magnétiques vrais des deux aimants?*

Nous avons (*fig.* 62)

$$M \sin\alpha = M' \sin(\alpha + \varepsilon) = M' \sin\alpha + M'\varepsilon \cos\alpha,$$

Fig. 62.

car l'angle ε est très petit ;

$$(M - M') \sin\alpha = M'\varepsilon \cos\alpha,$$

$$\varepsilon = \frac{M - M'}{M'} \tang\alpha.$$

12. *Biot a trouvé, pour un long aimant, la loi suivante de distribution du magnétisme :*

$$y = 173{,}76 \times 0{,}5179^x;$$

quelle était, dans ce barreau, la position du pôle?

Appelant X l'abscisse du pôle et R la résultante des actions exercées sur l'aimant, on sait que l'on a, en considérant le



pôle comme le centre des forces parallèles,

$$RX = \int_0^l yx\,dx = \int_0^l A\,a^x x\,dx.$$

On en déduit

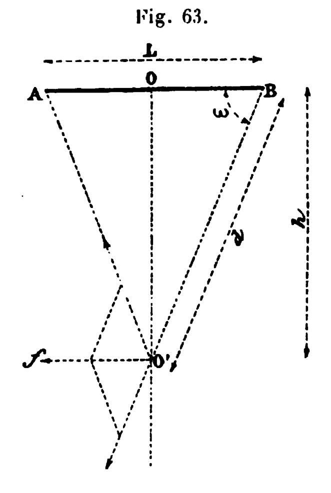
$$X = \frac{\int_0^l a^x x\,dx}{\int_0^l a^x\,dx} = \frac{la^l}{\log' a} - \frac{1}{\log' a}\int_0^l a^x\,dx = -\frac{1}{\log' a}.$$

C'est une quantité positive, puisque a est plus petit que l'unité :

$$X = \frac{-1}{\bar{1},7142457} = \frac{1}{0,2857} = 3,5.$$

13. *Dans le galvanomètre de Thomson, on crée un champ magnétique artificiel, à l'aide d'un aimant* AB (*fig.* 63), *mo-*

Fig. 63.



bile le long de l'axe OO' : *l'aimant a une longueur* L *égale à* 10cm ; *il est à une distance h variable du centre* O' *de l'aiguille mobile, collée au dos du miroir. On demande de cal-*

culer, pour différentes valeurs de h, l'intensité du champ magnétique ainsi produit, sachant que le moment magnétique M *de l'aimant* AB *est égal à* 10000 *unités* C.G.S.

Supposons, placée en $0'$, une masse magnétique égale à l'unité; elle est soumise à l'action de deux forces, dont la résultante f est égale à

$$f = \frac{M}{Ld^2}\cos\omega = \frac{M}{L^3}\cos^3\omega = N\cos^3\omega.$$

Mais

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{h}{L} = y.$$

Donc

$$f = N\frac{1}{(1+\operatorname{tang}^2\omega)^{\frac{3}{2}}} = N\frac{1}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Calculons quelques valeurs de f:

$$N = \frac{10000}{10^3} = 10.$$

h	$\frac{h}{L} = y$.	$(1+y^2)^{\frac{3}{2}}$.	f.
5^{cm}	0,50	$1{,}25^{\frac{3}{2}} = 1{,}397$	7,16
10	1,00	$2{,}00^{\frac{3}{2}} = 2{,}828$	3,53
15	1,50	$3{,}25^{\frac{3}{2}} = 5{,}859$	1,70
20	2,00	$5{,}00^{\frac{3}{2}} = 11{,}181$	0,89
25	2,50	$7{,}25^{\frac{3}{2}} = 19{,}521$	0,51
30	3,00	$10{,}00^{\frac{3}{2}} = 31{,}623$	0,31

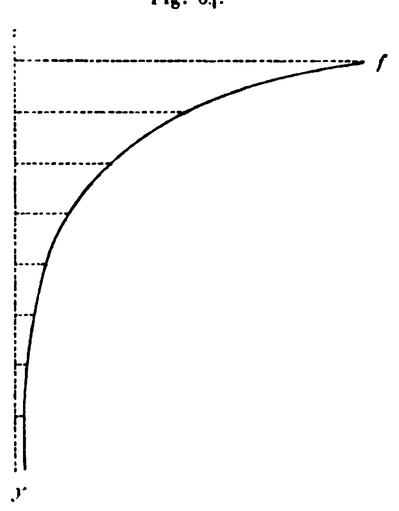
La *fig.* 64 permet de suivre facilement la décroissance de l'intensité du champ artificiel produit par l'aimant AB, au fur et à mesure que l'on éloigne cet aimant de l'aiguille mobile.

14. *Un barreau d'acier de* 662^{gr} *a un moment magnétique*

égal à 15358 unités; calculer l'intensité d'aimantation moyenne de ce barreau.

$$(3) \qquad I = \frac{15358}{v} = \frac{15358 \times 7,8}{662} = 180.$$

Fig. 64.



Pour déterminer le volume v du barreau, nous avons pris une densité de 7,8, qui est celle de l'acier.

15. *Un fil de fer doux de* 0^{cm},1 *de diamètre et* 100^{cm} *de longueur est placé parallèlement au champ terrestre, à Paris; quelle sera l'intensité de son aimantation et son moment magnétique?*

$$(7) \qquad I = KH = 33 \times 0,464 = 15,31.$$

Le volume v de l'aimant étant égal à $0,0079 \times 100 = 0^{cc},79$, nous aurons

$$(3) \qquad M = vI = 0,79 \times 15,31 = 12,10.$$

16. *Le fléau d'une balance, qui est en fer de Suède parfaitement doux, oscille d'abord dans le méridien magnétique; puis on retourne l'instrument bout pour bout. Quelle est, en milligrammes, l'erreur introduite dans une pesée par l'influence magnétique de la Terre? Le fléau a* 20^{cm} *de longueur et une section moyenne de* $1^{cq},5$; *au lieu de l'expérience, l'inclinaison est égale à* $65°13',1$ *et l'intensité horizontale de la force magnétique terrestre* $H = 0,1945$.

L'intensité verticale V est égale à

$$0,1945 \times \tang 65°13'1 = 0,4212.$$

Le fléau de fer doux, dont l'axe est dans le méridien, éprouve l'effet de l'induction terrestre et devient temporairement un aimant, dont l'aimantation est proportionnelle à la force magnétique verticale; pour simplifier le problème, nous admettrons l'exactitude rigoureuse de cette proposition et nous négligerons l'induction propre du corps sur lui-même, ainsi que les variations du champ qui en résultent. Nous aurons donc

$$(7) \qquad I = 33 \times 0,4212 = 13,90.$$

Nous en déduisons le moment magnétique M :

$$M = 2lq = 2lIS = 20 \times 13,90 \times 1,5 = 417.$$

Enfin, l'équation d'équilibre, dans les deux positions de la balance, est

$$MV = \tfrac{1}{2}plg,$$

d'où

$$p = \frac{2MV}{lg} = 0^{gr},0358 = 35^{mmg},8.$$

On peut constater expérimentalement cette influence, en plaçant un trébuchet sur une table pivotante, à axe rigoureusement vertical; l'influence serait bien plus faible sur un fléau d'acier dont la susceptibilité est moindre que celle du fer doux.

La longueur du fléau disparaît dans les calculs : on a en effet

$$p = \frac{4KSV^2}{g}.$$

Quand on opère par double pesée, l'influence du magnétisme est annulée, mais la sensibilité de la balance diminue légèrement.

17. *Un barreau d'acier de* 3^{cm} *de large sur* 1^{cm} *d'épaisseur a reçu une aimantation uniforme dont l'intensité* $I = 2400$; *on le coupe en deux par une section perpendiculaire à l'axe; quelle est la force nécessaire pour séparer les deux fragments?*

$$F = 2\pi I \times IS = 2\pi I^2 S$$
$$= 108573600 \text{ dynes}$$
$$= 110^{kg},676.$$

18. *Un cylindre de fer doux est amené de l'infini dans un champ magnétique de* 100 *unités; on demande de combien s'échaufferait ce barreau, si on le désaimantait brusquement en le reportant à l'infini?*

Le travail nécessaire pour amener un aimant dans son champ est égal à l'énergie de cet aimant; on aura donc

$$(2) \qquad \mathfrak{T} = W = -vKH^2 = -vIH.$$

Mais l'aimant s'est constitué dans son déplacement, et son moment a cru graduellement de zéro à sa valeur actuelle; le travail dépensé n'est donc que la moitié de ce qu'aurait exigé un aimant réel.

Par suite,

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} KH^2$$

par unité de volume,

$$= 16500 \text{ ergs}.$$

Il en résulte un échauffement de

$$\frac{16500}{7,8 \times 0,1138 \times 4,17 \times 10^7} = 0^\circ,00044 \text{ C}.$$

CHAPITRE III.

ÉLECTROCINÉTIQUE OU PROPAGATION ET ÉNERGIE DES COURANTS.

Quand on établit une communication entre deux conducteurs maintenus à des potentiels différents, il se produit entre eux un flux d'électricité, c'est-à-dire un courant : sa cause est l'inégalité de niveau des deux conducteurs; son intensité, c'est-à-dire la quantité d'électricité qui passe dans l'unité de temps, est proportionnelle à cette différence de potentiel, qu'on appelle la *force électromotrice;* elle varie d'autre part en raison inverse de la résistance du circuit. Cette loi a été formulée par Ohm, en appliquant à l'électricité les résultats obtenus par Fourier dans l'étude de la propagation du calorique :

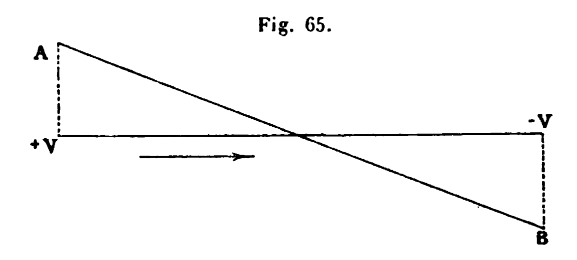
$$(1) \qquad I = \frac{E}{R}.$$

La force électromotrice E est une constante du générateur; la résistance R est égale à $\frac{l}{cs}$; elle est donc proportionnelle à la longueur du fil conjonctif, en raison inverse de sa section et elle varie avec $\frac{1}{c}$, qui est la résistance spécifique de la matière du conducteur, c'est-à-dire la résistance d'un cube, de 1^{cm} de côté, entre ses faces opposées : c est la conductibilité spécifique de la substance.

Le potentiel décroît en progression arithmétique le long du fil, dans le sens de la propagation du courant; la courbe des potentiels est représentée géométriquement par la ligne droite AB (*fig.* 65), entre les deux pôles de la source aux ni-

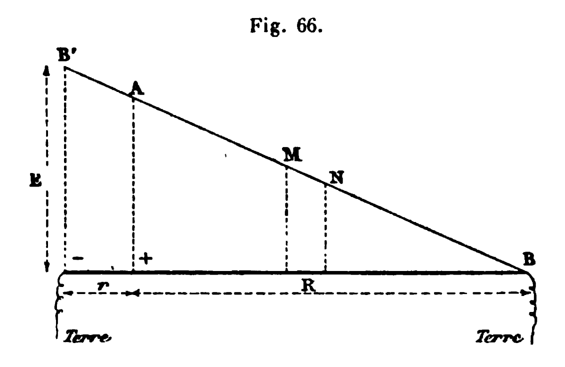
veaux — V et + V. Les potentiels sont rapportés au potentiel moyen de la Terre, pris comme zéro de l'échelle. Dans un

Fig. 65.



conducteur homogène, dont l'extrémité B est à la Terre, le potentiel varie d'un point M (*fig.* 66) à un autre point N pro-

Fig. 66.



portionnellement à la distance qui sépare ces points de l'extrémité B. Le potentiel au pôle A se rapprochera d'autant plus de la force électromotrice E de la source que la résistance intérieure r de cette source sera moindre relativement à R, la résistance du conducteur.

Supposons qu'un courant se ramifie en plusieurs autres, de résistance R', R'', R''', ..., la résistance x du conducteur unique pouvant les remplacer tous est égale à l'inverse de la somme des réciproques des résistances des circuits partiels :

$$(2) \qquad x = \frac{1}{\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} + \frac{1}{R'''} + \dots}.$$

On peut dire aussi que la conductibilité du faisceau est égale à la somme des conductibilités des fils qui le composent, car

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} + \frac{1}{R'''} + \ldots$$

S'il n'y a que deux dérivations,

$$x = \frac{R'R''}{R' + R''}. \tag{3}$$

Appelant I l'intensité du courant dans le circuit principal, I', I'', ... les intensités dans les deux circuits dérivés, on a

$$I' = I\,\frac{R''}{R' + R''}, \qquad I'' = I\,\frac{R'}{R' + R''},$$

$$\frac{I'}{I''} = \frac{R''}{R'}.$$

Un *shunt* de résistance S étant intercalé entre les bornes d'un galvanomètre de résistance G, le pouvoir multiplicateur du shunt, c'est-à-dire le coefficient par lequel il faut multiplier l'intensité observée pour connaître l'intensité du courant total, est égal à

$$n = \frac{G + S}{S}. \tag{3 bis}$$

Pour obtenir un pouvoir multiplicateur donné n, on fera donc

$$S = \frac{G}{n - 1}, \tag{3 ter}$$

soit

$$S = \frac{G}{9} = \frac{G}{99} = \frac{G}{999} \text{ pour } n = 10 = 100 = 1000.$$

La résistance totale x du shunt et du galvanomètre se calcule de même :

$$x = \frac{GS}{G + S}.$$

Les lois de Kirchhoff permettent de traiter complètement le problème général des dérivations :

PREMIÈRE LOI. — *Lorsque plusieurs conducteurs aboutissent à un même point, la somme des intensités des courants qui traversent ce point est nulle.*

$$\Sigma I = 0.$$

DEUXIÈME LOI. — *Pour toute figure fermée d'un réseau, la somme du produit des intensités des courants par les résistances des circuits est égale à la somme des forces électromotrices comprises dans la figure fermée.*

$$(5) \qquad \Sigma IR = \Sigma E.$$

M. Bosscha a déduit de ces lois deux corollaires qu'il est utile de connaître :

1° Si l'intensité du courant est nulle dans une branche d'un circuit, on ne change pas le régime du système en faisant varier la résistance de cette branche de zéro à l'infini.

2° Lorsqu'il se trouve dans le système deux conducteurs A et B tels qu'une force électromotrice placée en A n'envoie aucun courant en B, on peut faire varier la résistance de A de zéro à l'infini sans changer le régime en B.

Nous avons supposé jusqu'ici un isolement du conducteur suffisamment parfait pour écarter toute déperdition latérale; mais, s'il y avait une perte par la surface, nous appliquerions l'équation de Fourier relative à la propagation de la chaleur dans une barre, et nous trouverions

$$(6) \qquad V = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x};$$

si ce fil était indéfini, la constante A serait nulle (comme en chaleur), et il viendrait

$$V = Be^{-\beta x}.$$

L'état variable du courant, qui précède l'établissement du régime permanent, soulève des problèmes fort difficiles, qu'on résout encore par les formules de Fourier; mais les in-



tégrales auxquelles on est conduit de la sorte se prêtent difficilement à des applications numériques.

La loi de Ohm s'applique aussi aux conducteurs à deux ou trois dimensions : appelant ds un élément pris sur une surface de niveau, l'intensité du courant qui traverse cette surface est donnée par l'équation

$$(7) \qquad I = -c\int \frac{dV}{dn}\, ds,$$

dont l'intégrale doit être étendue à la surface entière. La résistance de l'espace compris entre deux surfaces aux potentiels V_0 et V_1 est

$$(7\ bis) \qquad R = -(V_0 - V_1)\frac{1}{c\int \frac{dV}{dn}\, ds}.$$

On démontre que le produit RC de la résistance d'un condensateur par sa capacité électrostatique est constant :

$$(7\ ter) \qquad RC = \frac{1}{4\pi c}.$$

L'énergie d'un courant peut donner lieu à un travail mécanique, un changement d'état physique, une décomposition chimique ou un dégagement de chaleur : elle est toujours égale au produit de l'intensité du courant par la chute de potentiel entre deux niveaux considérés :

$$(8) \qquad W = I(V_1 - V_2) = IE.$$

Entre deux points séparés par une résistance R, nous aurons, dans l'unité de temps,

$$W = I^2R = \frac{E^2}{R}.$$

La quantité de chaleur équivalente w sera donnée par l'équation

$$(8\ bis) \qquad w = AI^2R = A\frac{E^2}{R}:$$

c'est la *loi de Joule,* qui est applicable même à la période variable :

$$w = A\int_0^t I^2 R\,dt.$$

Admettons qu'entre les deux points considérés, séparés par une résistance R, il y ait une chute brusque e de potentiel indépendante de l'intensité du courant; nous aurons

$$w = A[I(IR + e)] = AI^2R + AIe.$$

Cette chaleur se compose de deux parties, l'une qui échauffe toute la longueur du conducteur, d'après la loi de Joule, l'autre qui est localisée en un point, et qui est positive, si la chute se fait dans le sens du courant : c'est l'*effet Peltier.*

Le dégagement de chaleur indiqué par la loi de Joule se produit même dans les électrolytes traversés par le courant; mais on constate entre les électrodes une chute de potentiel qui correspond à l'énergie absorbée par le travail chimique. Cela devait être en vertu du principe de la conservation de l'énergie.

Soient I l'intensité du courant qui traverse l'électrolyte, R sa résistance, q la chaleur de formation d'un équivalent, ε l'équivalent électrochimique, c'est-à-dire le poids décomposé par un coulomb; admettons qu'il n'intervienne aucune énergie extérieure :

$$AI^2R + I\varepsilon q = 0,$$

$$I = -J\frac{\varepsilon q}{R} = \frac{e}{R}.$$

Donc

$$(9) \qquad e = J\varepsilon q.$$

e est la force électromotrice inverse de l'électrolyte : elle a pour mesure, en unités absolues, le produit de l'équivalent mécanique de la chaleur J par la quantité εq de chaleur absorbée par la libération de 1éq électrochimique d'un des éléments de l'électrolyte. Cette loi est connue sous le nom de *loi de Thomson.*

Le travail chimique serait impossible, si la chaleur de com-

binaison de l'électrolyte (égale à sa chaleur de décomposition) était supérieure à la chaleur équivalente à l'énergie du courant. Une pile de Volta ne saurait décomposer l'eau.

Nous plaçant à un autre point de vue, nous dirons que la décomposition d'un électrolyte n'est possible que si la différence de potentiel, établie par le courant entre les électrodes, est supérieure à la force électromotrice inverse de l'électrolyte, c'est-à-dire à la polarisation des électrodes. Le dépôt sur les lames des éléments de l'électrolyte suffit pour expliquer le phénomène de la polarisation. Les électrodes polarisées sont de véritables condensateurs, dont la capacité dépend de leur état et de leurs dimensions; la force électromotrice du courant secondaire, produit par leur décharge, dépend au contraire de la nature des éléments qui se recombinent. La quantité d'électricité restituée pendant la durée du courant secondaire est égale à celle qu'il a fallu dépenser pour polariser les électrodes. Toute la théorie des *accumulateurs* est renfermée dans ce peu de mots.

Dans la décomposition des électrolytes complexes, les corps qui se dégagent aux électrodes sont ceux dont la libération exige le moins d'énergie : cette loi, dite *loi de Sprague,* est la réciproque de la loi du travail maximum formulée par M. Berthelot.

Nous avons supposé jusqu'ici que les divers points des circuits considérés étaient maintenus à une même température : il nous reste à parler des phénomènes *thermo-électriques.*

Un circuit métallique, formé d'éléments hétérogènes, est traversé par un courant, lorsque ses différents points sont à des températures différentes : c'est ainsi qu'on obtient des couples thermo-électriques, en soudant entre eux divers métaux constituant un circuit fermé.

La force électromotrice d'un couple dépend de la nature des métaux au contact; mais il est indifférent que ces métaux soient reliés directement ou par l'intermédiaire d'un conducteur quelconque.

Les forces thermo-électromotrices sont fonction de la différence de température des soudures, et elles constituent un caractère spécifique pour chaque couple. Toutefois, on remarque que si une des soudures est maintenue à une tem-

pérature constante, et que l'on élève progressivement la température de l'autre soudure, la force électromotrice augmente généralement jusqu'à ce qu'elle atteigne un maximum; elle diminue ensuite jusqu'à zéro et change de signe. Cette interversion est une nouvelle caractéristique de la nature des métaux.

Pour un couple présentant une différence dt de température, on observe une différence dE de force électromotrice, qui est égale à une certaine fonction de la température $\varphi(t)$, à laquelle Sir W. Thomson a donné le nom de *pouvoir thermo-électrique*. Le pouvoir thermo-électrique de deux métaux, à une température t, est égal à la différence des pouvoirs thermo-électriques de chacun d'eux par rapport à un troisième métal. On rapporte généralement les pouvoirs au plomb.

Thomson a introduit une autre considération, qui est fort utile; il a appelé *chaleur spécifique d'électricité* un coefficient σ, variable avec la température, caractéristique pour chaque métal, et qui représente la différence de potentiel créée par une variation de température égale à l'unité pour un courant d'une unité. M. Tait a démontré que la chaleur spécifique d'électricité est proportionnelle à la température absolue T.

On appelle *point neutre* de deux métaux la température pour laquelle leurs pouvoirs thermo-électriques sont égaux : il n'y a plus de courant, lorsque la moyenne des températures des soudures est égale à la température du point neutre; le courant s'intervertit donc au point neutre.

Le phénomène de Peltier établit une relation entre les actions thermo-électriques et les dégagements de calorique produits par les courants, par application du principe de la conservation de l'énergie. En appelant Π la quantité de chaleur positive ou négative dégagée par seconde à chaque soudure en vertu de l'effet Peltier, par l'unité de courant, on trouve que

$$\Pi = -\frac{T}{J}\frac{dE}{dT}; \tag{10}$$

dans cette formule, T est la température absolue et $\frac{dE}{dT}dT$ est la force électromotrice du couple pour une différence dT

des soudures. L'effet Peltier est positif quand $\frac{dE}{dT}$ est négatif; il y a donc dans ce cas dégagement de chaleur : au point neutre, $\frac{dE}{dT} = 0$, et l'effet Peltier est nul.

Unités électromagnétiques C.G.S.

Dans ce système, la définition de l'unité de quantité de magnétisme par la loi de Coulomb a été prise comme base et point de départ de toutes les autres mesures : elle a donc les mêmes dimensions que l'unité d'électricité dans le système électrostatique.

$$f = \frac{q^2}{r^2}, \qquad q = rf^{\frac{1}{2}} = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Voici dès lors comment on passe à l'unité de quantité d'électricité : on sait que l'action magnétique d'un courant fermé est égale à celle d'un feuillet magnétique de même contour; l'*intensité* d'un courant a donc les mêmes dimensions que la puissance magnétique d'un feuillet [1] :

$$I = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Or la *quantité* est le produit de l'intensité par le temps. Donc

$$Q = It = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}.$$

La *résistance* est définie par la loi de Joule;

$$W = I^2 RT,$$
$$R = LT^{-1}.$$

C'est une vitesse.

---

[1] L'unité de pôle étant définie, on peut prendre pour unité d'intensité du courant celle d'un courant qui, traversant un circuit de 1^{cm} de longueur courbé suivant un arc de 1^{cm} de rayon, exercerait une attraction de une dyne sur l'unité de pôle, placée au centre du circuit. L'équation de Laplace donne

$$f = \frac{qIl}{r^2}, \qquad I = \frac{fr^2}{ql},$$

$$I = \frac{MLT^{-2}L^2}{M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}L} = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

La *force électromotrice* $E = IR$; son équation est

$$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} \text{ (}^{1}\text{)}.$$

Enfin, la *capacité* $C = \frac{Q}{E}$:

$$C = L^{-1} T^{2}.$$

Telles sont les unités électromagnétiques C.G.S.; elles ne se trouvent malheureusement pas en rapport avec les grandeurs que l'on a à mesurer dans la pratique et il a fallu créer en vue des applications un système différent, dérivé du premier; il est basé sur une unité de longueur égale à 10^9 centimètres et une unité de masse égale à 10^{-11} masses du gramme. Tout le monde connaît ce système, dont nous n'avons qu'à rappeler la genèse et les relations.

Résistance.	Ohm.	10^9	unités	C.G.S.
Force électromotrice.	Volt.	10^8	»	»
Intensité.	Ampère.	10^{-1}	»	»
Quantité.	Coulomb.	10^{-1}	»	»
Capacité.	Farad.	10^{-9}	»	»

Ce système est cohérent comme le premier. Un ampère transporte un coulomb par seconde; un volt produit un ampère dans une résistance d'un ohm; un farad, chargé au potentiel d'un volt, contient un coulomb et se décharge en une seconde à travers un ohm.

L'unité pratique de travail électrique n'est pas l'erg, mais le joule, ou volt-coulomb : il égale 10 mégergs ou $\frac{1}{9,81}$ kilogrammètre. Il suffit donc de diviser par 9,81 le produit des volts par les coulombs pour avoir en kilogrammètres l'expression du travail électrique. Même règle pour le volt-ampère. ou watt, qui est l'unité de puissance électrique. Un cheval-

(1) On aurait aussi pu écrire $W = QE$. De même, on trouverait une relation entre E et R pour déterminer I par la loi d'Ohm.

vapeur égale 736 watts : le horse-power anglais en vaut 746.

Il est nécessaire de connaître le rapport qui existe entre les unités électromagnétiques et les unités électrostatiques : ce rapport est toujours égal à $\frac{L}{T}$ ou $\frac{L^2}{T^2}$, c'est-à-dire à une vitesse ou au carré d'une vitesse, que nous désignerons par la lettre v :

$$v = \frac{I}{i} = \frac{e}{E} = \frac{Q}{q},$$

$$v^2 = \frac{r}{R} = \frac{C}{c}.$$

Les majuscules se rapportent aux unités électromagnétiques.

La vitesse v, dont Maxwell a donné le sens physique, est égale à 3×10^{10} centimètres par seconde : c'est la vitesse de la lumière. Cette coïncidence n'est certainement pas fortuite et elle résulte nécessairement d'une corrélation dans la nature des phénomènes électriques et lumineux.

CONSTANTES NUMÉRIQUES.

Forces électromotrices des piles hydro-électriques.

Piles à un liquide.

				volts
Volta	Zn, SO^3, nHO	Cu,		0,98
Smée	Zn, SO^3, nHO	Ag platiné,		0,85
Leclanché	Zn, AzH^4Cl, nHO,	MnO^2,	C	1,45
Warren de la Rue	Zn, NaCl, nHO,	AgCl,	Ag	1,06
De Lalande et Chaperon	Zn, KO, nHO,	CuO^2,	Cu	0,85
Poggendorff	Zn, liquide chromique,		C	1,80

Piles à deux liquides.

				volts
Daniell	Zn, SO^3, nHO,	CuO, SO^3,	Cu	1,07
Reynier	Zn, NaO, nHO,	CuO, SO^3,	Cu	1,5
Grove	Zn, SO^3, nHO,	AzO^5, HO,	Pt	1,96
Bunsen	Zn, SO^3, nHO,	AzO^5, HO,	C	1,90
Poggendorff	Zn, SO^3, nHO,	KO, 2 CrO^3,	C	2,01
Marié-Davy	Zn, SO^3, nHO,	HgO, SO^3,	C	1,51

Étalons (à 15°).

		volts
Post-Office	Zn; solution saturée $ZnO\,SO^3$; demi-saturée $CuO\,SO^3$; Cu	1,074
Warren de la Rue	Zn; solution $\frac{23}{1000}$ AzH^4Cl; AgCl; Ag	1,068
Latimer-Clark	Zn; $ZnO\,SO^3$ fondu; HgO, SO^3 pâteux; Hg	1,438
J. Regnault	Zn; $SO^3,HO + 12HO$; $CdO\,SO^3$; Cd	0,34

Différences de potentiel au contact en volts (Ayrton, Perry et Everett).

	Charbon.	Cuivre.	Fer.	Platine.	Plomb.	Zinc.
Eau	0,014	0,185	0,148	0,320	0,171	0,028
$CuO\,SO^3$ saturé	»	0,103	»	»	»	−0,536
NaCl(D = 1,18)	»	0,070	»	−0,856	−0,267	»
AzH^4Cl saturé	»	−0,475	−0,605	0,057	−0,189	−0,565
$ZnO\,SO^3$ saturé	»	»	−0,652	»	»	−0,238
$SO^3\,HO$ au $\frac{1}{10}$	0,035	»	»	»	»	−0,344
$AzO^5\,HO$ concentré.	»	»	»	0,672	»	»

Sulfate de zinc saturé-sulfate de cuivre saturé	0,095
Dilution sulfurique au $\frac{1}{10}$ acide azotique concentré	0,078

Cuivre-fer	0,146	Plomb-fer	−0,401
Cuivre-zinc	0,750	Plomb-zinc	0,210
Cuivre-plomb	0,542	Zinc-fer	−0,600
Cuivre-étain	0,456	Zinc-étain	−0,281
		Zinc-platine	−0,981
		Zinc-charbon	−1,096

Série électrochimique.

+Oxygène.
Soufre.
Azote.
Chlore.
Carbone.
Antimoine.
Hydrogène.
Platine.
Mercure.
Argent.
Cuivre.
Bismuth.
Étain.
Plomb.
Fer.
Zinc.
−Aluminium.

Pouvoirs thermo-électriques des métaux par rapport au plomb pour des températures t C. (Matthiesen-Everett).

Fer........	$-1734 + 4,87\,t$ C.G.S.
Platine.....	$-260 + 0,75\,t$ C.G.S.
Maillechort.	$+1207 + 5,12\,t$ C.G.S.
Zinc.......	$-234 - 2,40\,t$ C.G.S.
Argent	$-214 - 1,50\,t$ C.G.S.
Cuivre.....	$-136 - 0,95\,t$ C.G.S.
Plomb.....	0
Étain......	$+43 - 0,55\,t$ C.G.S.

La différence des pouvoirs de deux métaux, pour une température t, est la différence de potentiel, par degré de différence entre les températures des soudures dans le couple formé de ces métaux, quand t est la moyenne des températures des soudures. Le courant traverse la soudure la plus chaude en allant du métal qui a le pouvoir le plus élevé à l'autre métal.

Forces électromotrices et résistances des piles thermo-électriques usuelles.

		E.	r.
Bunsen..............	Pyrite-cuivre	0,110	»
Clamond............	Fer-(Sb, Zn, Bi)	0,050	0,028
Chaudron...........	Fer-(Sb, Zn, Bi)	0,058	0,007
Noé................	Maillechort-Sb	0,062	0,025

Série électrothermique (Becquerel).

+Bismuth.	Plomb.
Nickel.	Cuivre.
Platine.	Zinc.
Argent.	Fer.
Étain.	—Antimoine.

Dans cette série, chaque métal est positif par rapport à ceux qui le suivent, et négatif par rapport à ceux qui le précèdent.

Accumulateurs.

	Force électromotrice normale.	Capacité par kilogramme de plomb.	Énergie par kilogramme de plomb.
	volts	coulombs	kgm
Planté................	2,10	36360	7785
F.S.V.................	2,05	19000	3800
De Montaud...........	2,10	39600	8477
Julien................	2,24	54000	12342
Commelin-Desmasures ..	1,00	360000 (Fe, Cu)	36695

Équivalents électrochimiques (milligrammes par coulomb).

Hydrogène	0,010384
Argent	1,11730
Bismuth	2,18064
Cadmium	0,58150
Chlore	0,36863
Cuivre	0,33021 (cuprique)
Étain	0,61266 (stanneux)
Fer	0,29075 (ferreux)
Mercure	1,03740 (mercurique)
Nickel	0,30633
Or	2,04565
Platine	1,02802
Plomb	1,07160
Potassium	0,40498
Sodium	0,23873
Zinc	0,33698
Eau	0,09346

Formules pratiques applicables aux voltamètres à anodes solubles (intensités I en ampères).

Argent. $I = 0,88 \frac{P}{t}$ (P = poids déposé en milligrammes).

Cuivre. $I = 3,02 \frac{P}{t}$ (t = durée de l'opération en secondes).

DOCUMENTS PRATIQUES.

	Quantités libérées ou décomposées par ampère-heure en grammes.	Chaleurs de combustion ou de formation par équivalent en calories.	Équivalent.
H	0,0375	34,450	1
HO	0,337	»	9
Cu	1,189	21,000	31,8
CuO, SO^3	4,676	29,600	79,8
Zn	1,213	41,800	33
ZnO, SO^3	5,390	11,700	81
Fe	1,047	34,500	28
FeO, SO^3	5,213	12,500	76

	Quantités libérées ou décomposées par ampère-heure en grammes.	Chaleurs de combustion ou de formation par équivalent en calories.	Équivalent.
Hg	3,725	21,100	100
HgO, SO^3	5,550	»	148
Pb	3,858	25,500	103,5
Ag	4,022	3,500	108
AgCl	5,381	29,200	143,5
AzO^5, HO	2,363	6,880	63

RÉSISTANCES.

Valeur de l'ohm légal : 106^{cm}.

Métaux et alliages.

	Résistance spécifique $\frac{1}{c}$.	Conductibilité spécifique c.	100 mètres de $0^{cm},1$ de diamètre $= 0^{cq},0079$ de section.
	C.G.S.	C.G.S.	ohms
Argent	$1,492 \times 10^3$	$67,03 \times 10^{-5}$	1,899
Cuivre	1,584	63,13	2,017
Aluminium	2,890	34,61	3,679
Fer	9,636	10,38	12,270
Zinc	5,580	17,90	7,105
Platine	8,981	11,14	11,435
Nickel	12,360	8,09	15,730
Étain	13,100	7,63	16,680
Plomb	19,465	5,14	24,780
Antimoine	35,210	2,84	44,830
Bismuth	130,100	0,77	165,600
Maillechort	20,760	4,82	26,430

Accroissement de résistance par degré centigrade d'augmentation de température entre 0° et 20°.

Argent	$0,391 \times 10^{-2}$
Cuivre	0,388
Platine	0,247
Fer	0,453
Maillechort	0,036

Résistances spécifiques des liquides en ohm par centimètre.

$SO^3, HO + 14HO$	1,336
AzO^5, HO (densité = 1,185)	1,287
HCl dissous (densité = 1,109)	1,315
KO, HO (densité = 1,274)	1,850
$ZnO, SO^3 + 24HO$	18,02
$CuO, SO^3 + 45HO$	19,10
HO distillée	7×10^5
Alcool absolu	30×10^5
Gutta-percha	250×10^{12}
Caoutchouc	7500×10^{12}
Ébonite	28000×10^{12}
Paraffine	34000×10^{12}

Résistance des fils de cuivre à 0°.

Diamètres cm	Poids par mètre en grammes.	Résistance par mètre en ohms.
0,01	0,070	2,036
0,10	6,990	0,020
0,15	15,750	0,009
0,20	27,95	0,005
0,30	62,93	0,0023
0,50	174,00	0,0008
1,00	699,00	0,0002

Barème des résistances et des conductibilités des fils de cuivre à diverses températures.

Températures.	$\frac{1}{c}$.	c.	Températures.	$\frac{1}{c}$.	c.
0	1	1	11	1,0420	0,9597
1	1,0038	0,9962	12	1,0460	0,9560
2	1,0076	0,9925	13	1,0499	0,9525
3	1,0113	0,9888	14	1,0541	0,9489
4	1,0152	0,9851	15	1,0577	0,9454
5	0,0190	0,9814	16	1,0617	0,9419
6	1,0228	0,9777	17	1,0656	0,9384
7	1,0266	0,9741	18	1,0696	0,9349
8	1,0305	0,9704	19	1,0736	0,9315
9	1,0343	0,9668	20	1,0774	0,9281
10	1,0382	0,9632	25	1,0976	0,9111

Résistance du fil télégraphique français en fer :

$$R = \frac{144}{d^2} \text{ ohm par kilomètre.}$$

Résistance intérieure des piles.

	Hauteur.	r.
	mm	ohms
Daniell	200	2,80 à 1,5
Daniell	60	0,90
Grove	200	0,30
Bunsen	200	0,24 à 0,10
Poggendorff	200	0,25 à 0,20
Reynier	200	0,07
Leclanché	200	1,10

Ces chiffres ne sont qu'approximatifs, car les résistances varient notablement avec la dimension et l'écartement des électrodes, et la concentration des liquides.

Résistance intérieure des accumulateurs.

Genre Planté	$\frac{2}{S}$;	S en décimètres carrés.	Moyenne 0,01 ohm.
Genre Faure	$\frac{0,008}{p}$	p en kilogramme d'électrode.	

Même remarque que ci-dessus.

APPLICATIONS.

1. *Une pile à colonne de Volta, formée de* 50 *éléments, est posée sur un pied isolant; elle forme un conducteur d'une capacité* γ *égale à* 0,0001 *microfarad. On charge un conducteur de capacité* C *en le mettant en communication avec l'élément positif supérieur; que devient, immédiatement après le contact, le potentiel du dernier élément négatif inférieur, pour des valeurs de* C *égales à* 0,0001 *et* 0,00001 *microfarad?*

Dans une pile isolée, la distribution des potentiels est symétrique par rapport à son centre; de plus, en déchargeant le premier élément, on décharge toute la pile, et l'électricité se distribue comme sur un conducteur ordinaire, entre tous les éléments, sans troubler la gradation des potentiels.

Appelant donc V_1 le potentiel du premier élément et V_n celui du dernier, nous aurons

$$V_1 = -V_n = \pm \frac{nE}{2} = \pm \frac{50 \times 0,98}{2} = \pm 24,50 \text{ volts.}$$

On donne au conducteur de capacité C une charge $+m$; chaque élément, et par suite toute la colonne, éprouve une diminution de potentiel V.

Or, soit V_x le potentiel du premier élément, après le contact :

$$m = \gamma V = CV_x = C(V_1 - V).$$

La chute du potentiel du premier élément est, par conséquent, égale à

$$V = V_1 \frac{C}{C+\gamma} = V_1 \frac{1}{1+\frac{\gamma}{C}} = n\frac{E}{2}\frac{1}{1+\frac{\gamma}{C}}.$$

Le potentiel du dernier élément devient dès lors

$$-\frac{nE}{2} - \frac{nE}{2}\frac{1}{1+\frac{\gamma}{C}} = -\frac{nE}{2}\left(1+\frac{1}{1+\frac{\gamma}{C}}\right).$$

Pour $C = 0^{mf},0001$, nous aurons

$$-24,50\left(1+\frac{1}{2}\right) = -36,75 \text{ volts.}$$

Pour $C = 0^{mf},00001$, il vient

$$-24,50\left(1+\frac{1}{11}\right) = -26,70 \text{ volts.}$$

Une valeur de C très grande eût donné au dernier élément un potentiel double de ce qu'il était d'abord et le premier élément serait tombé immédiatement après le contact au potentiel zéro; c'est ce qui arrive lorsqu'on met l'élément supérieur en communication directe avec la terre.

2. *Une machine à diélectrique de Carré charge en* 100 *tours de plateau une batterie de* 0,1 *microfarad de capacité, au potentiel de* 2500 *volts : quel courant peut-elle alimenter à la vitesse de* 5 *tours par seconde et quelle énergie produit-elle ?*

La charge de la batterie est donnée par l'équation

$$0,1 \times 10^{-6} \times 2500 = 250 \times 10^{-6} \text{ coulombs};$$

le débit est donc de 250×10^{-8} coulombs par tour, en négligeant les pertes ; il sera donc par seconde, pour 5 tours, de $1250 \times 10^{-8} = 0,0000125$ coulomb.

Le courant a dès lors une intensité égale à 0,0000125 ampère.

L'énergie

$$W = 1250 \times 10^{-8} \times 2500 = 0,0312 \text{ joules}.$$

La puissance du moteur à employer sera donc de

$$\frac{0,0312}{9,81} = 0,00318 \text{ kilogrammètre par seconde};$$

l'énergie utilisée dans les machines électrostatiques est très faible, mais les déperditions et les résistances passives des organes entraînent une dépense de travail relativement très considérable.

3. *Une pile de force électromotrice* $E = 1,48$ *volt a une résistance intérieure* $r = 1,3$ *ohm et elle est fermée par un fil conjonctif de* 2 *ohms de résistance* R; *quelle est la différence de potentiel efficace* V *aux pôles?*

$$I = \frac{E}{r + R},$$

$$V = IR = E\frac{R}{r + R} = E\frac{1}{\frac{r}{R} + 1} = 0,9 \text{ volt}.$$

La force électromotrice E est la différence de potentiel des pôles isolés.

4. *On dispose de neuf piles Bunsen et d'un élément Leclanché : y a-t-il intérêt à introduire ce couple dans une série formée de ces couples Bunsen, la résistance du circuit extérieur étant de* 10 *ohms?*

Pour qu'il y ait intérêt à introduire un couple dans une série, il faut que sa force électromotrice soit supérieure à la chute de potentiel produite par sa résistance intérieure.

Or la chute de potentiel sur l'élément Leclanché considéré comme inactif est égale à

$$9\,E\,\frac{r'}{R+9r} = 9 \times 1{,}90\,\frac{1{,}1}{10+9\times 0{,}1} = 1{,}72.$$

La force électromotrice de l'élément Leclanché est, d'autre part, égale à 1,45.

Il n'y a donc pas intérêt à introduire cette pile dans la série : mais il suffirait que la résistance R extérieure devînt égale à 12 ohms pour qu'on pût conseiller l'opération.

5. *Une pile de résistance x est fermée sur un circuit de résistance* R *égale à* 5 *ohms et l'on a mesuré entre ses bornes une force électromotrice efficace* V *égale à* 1,35 *volt; la pile étant ouverte, on a trouvé que sa force électromotrice* [V] *égalait* 1,52 *volt, dans les mêmes conditions de polarisation. En déduire la valeur de x.*

$$V = E\,\frac{R}{R+x},$$

$$[V] = E,$$

$$V = [V]\,\frac{R}{R+x},$$

$$\frac{[V]-V}{V} = \frac{R+x}{R} - 1 = \frac{x}{R},$$

$$x = R\,\frac{[V]-V}{V} = 5\,\frac{0{,}17}{1{,}35} = 0{,}63\ \text{ohm}.$$

Ce mode serait très pratique si l'on pouvait procéder facilement à la mesure de [V] par un électromètre, un galvanomètre à très grande résistance ou un voltmètre exact.

6. *On monte* $N = 50$ *éléments Bunsen en* $m = 5$ *séries de* $n = 10$ *éléments chacune, qu'on associe en batterie; quelle est l'intensité du courant, la résistance du circuit extérieur étant de* 12 *ohms?*

$$I = \frac{nE}{R + \frac{nr}{m}} = \frac{nmE}{mR + nr} = \frac{NnE}{NR + n^2 r}$$

$$= \frac{50 \times 10 \times 1,9}{50 \times 12 + 100 \times 0,1} = 1,55 \text{ ampère.}$$

On sait que I devient maximum lorsque $R = \frac{nr}{m}$, c'est-à-dire lorsque la résistance du circuit extérieur est égale à celle de la pile. On a, en effet, en prenant la dérivée par rapport à n,

$$NE(NR + n^2 r) - 2n^2 NEr = 0,$$

d'où

$$R = \frac{n^2 r}{N}.$$

Il en résulte que l'intensité est maximum lorsque la différence de potentiel aux bornes de la pile est égale à la moitié de la force électromotrice.

7. *Quel est le courant le plus intense que puisse produire, sur une résistance de* 5 *ohms, un professeur disposant d'une pile de* 80 *éléments Poggendorff au bichromate?*

$$\frac{n^2 r}{N} = R,$$

$$n = \sqrt{\frac{RN}{r}} = \sqrt{\frac{5 \times 80}{0,25}} = 40.$$

Il faut donc former deux séries de 40 éléments et les associer en quantité; on aura

$$I = \frac{80 \times 2,01}{2 \times 5 + 40 \times 0,25} = \frac{168}{20} = 8,4 \text{ ampères.}$$

8. *Un médecin, possédant une batterie d'éléments Leclanché, veut se servir d'un courant de* 30 *milliampères sur une résistance qu'il évalue à* 2000 *ohms; combien doit-il assembler d'éléments?*

On ne peut songer qu'à un assemblage en série, vu la grande résistance extérieure et la faible résistance relative des éléments; nous aurons donc

$$I = \frac{xE}{R + xr},$$

$$x = \frac{RI}{E - rI} = \frac{2000 \times 0,03}{1,45 - 1,1 \times 0,03} = 53 \text{ éléments.}$$

9. *On a besoin d'un courant de* 8 *ampères dans un circuit de* 0,2 *ohm de résistance; combien faut-il acheter d'éléments Reynier et comment les assemblera-t-on?*

Égalons d'abord les résistances intérieure et extérieure; pour y groupes de x éléments, on a

$$\frac{x \times 0,07}{y} = 0,2.$$

La différence de potentiel aux bornes sera

$$IR = 8 \times 0,2 = 1,6;$$

ce doit être la moitié de la force électromotrice de la pile, ce qui donne

$$\tfrac{1}{2}x \times 1,5 = 1,6,$$

$$x = 2,1.$$

Prenons 2; dès lors

$$y = \frac{2,1 \times 0,07}{0,2} = 1.$$

Deux éléments en série suffisent en effet, et ils donnent une intensité de

$$\frac{2 \times 1,5}{0,2 + 0,07 \times 2} = 8,6 \text{ ampères.}$$

10. *Calculer la puissance mécanique de 50 éléments de Poggendorff montés en série ou en batterie?*

L'énergie totale d'une pile est $W = EI$ par seconde; mais la résistance intérieure des couples absorbe un certain travail, qui vient en décompte de l'énergie totale.

Nous aurons donc, pour l'expression du travail $\mathfrak{G}$ disponible dans le circuit extérieur d'un seul élément,

$$\mathfrak{G} = EI - rI^2 = EI\left(1 - \frac{rI}{E}\right).$$

Le rendement

$$\rho = \frac{\mathfrak{G}}{W} = \frac{\mathfrak{G}}{EI} = 1 - \frac{rI}{E}.$$

Or $\frac{E}{r}$ est l'intensité d'un courant qui ne surmonterait point d'autre résistance que celle de la pile et qui ne produirait, par suite, aucun travail extérieur. Soit I_0 l'intensité de ce courant correspondant au travail zéro.

Nous pourrons écrire

$$\mathfrak{G} = rI\left(\frac{E}{r} - I\right) = rI(I_0 - I)$$

et

$$\rho = 1 - \frac{I}{I_0}.$$

La valeur maximum de $\mathfrak{G}$ se calcule dès lors aisément : puisque la somme des deux facteurs I et $(I_0 - I)$ est constante, le maximum du produit correspond à $I = I_0 - I$ ou $I_0 = 2I$.

Dans ce cas

$$\rho = \tfrac{1}{2}$$

et

$$\mathfrak{G} = r\frac{I_0^2}{4} = \frac{r}{4}\frac{E^2}{r^2} = \frac{E^2}{4r}.$$

Pour N éléments assemblés en série,

$$\mathfrak{T} = \frac{NE^2}{4r} = \frac{50 \times \overline{1,80}^2}{4 \times 0,25} = 162 \text{ watts}$$

$$= \frac{162}{736} = 0,22 \text{ cheval-vapeur.}$$

Ce travail disponible doit être indépendant de l'arrangement des éléments; en effet, pour m séries de n, nous trouverons encore

$$\mathfrak{T} = \frac{n^2 E^2}{4 \frac{n}{m} r} = \frac{NE^2}{4r}.$$

11. *Combien faut-il brûler de zinc dans une pile de Bunsen pour produire 75^kgm par seconde pendant une heure, c'est-à-dire pour développer la puissance d'un cheval pendant une heure ?*

L'équivalent électrochimique du zinc est égal à $0^{\text{mmg}},337$; c'est le poids de ce métal dont la combinaison produit 1 coulomb. Nous n'avons donc qu'à chercher combien de coulombs sont nécessaires par cheval-heure.

Or on sait que

$$\frac{EQ}{9,81} = 270000.$$

Donc

$$Q = \frac{270000 \times 9,81}{1,9} = 1394053 \text{ coulombs.}$$

Le poids de zinc à brûler sera égal à

$$1394053 \times 0^{\text{mmg}},337 = 470^{\text{gr}}.$$

Il y a un intérêt évident à employer des piles à potentiel élevé : une pile de Daniell consomme deux fois plus de zinc qu'une pile de Bunsen.

12. *Une pile de Daniell, de* 2,8 *ohms de résistance, donne un courant de* 0,22 *ampère dans un circuit de* 2 *ohms de résistance; on veut décupler ce courant; combien prendra-t-on d'éléments et comment faudra-t-il les grouper ?*

La question admet une solution simple; combien d'éléments Daniell donneront un courant de 2,2 ampères dans une résistance de 2 ohms? C'est le problème n° 9.

$$\frac{x \times 2,80}{y} = 2,$$
$$\tfrac{1}{2}(x \times 1,07) = 2,2 \times 2,$$
$$x = 8 \text{ éléments},$$
$$y = 11 \text{ groupes}.$$

Il faut donc prendre 88 éléments, résultat curieux qui est dû à la faible résistance du circuit extérieur.

13. *Un amateur, qui dispose de* 20 *éléments de Poggendorff, désire savoir combien il pourra alimenter de lampes à incandescence de* 10 *bougies,* 40 *volts,* 0,6 *ampères et* 32 *ohms de résistance à chaud.*

Supposons que ces lampes soient montées en dérivation ; leur résistance totale est égale à $\frac{R}{x} = \frac{32}{x}$ ohms à chaud. L'intensité du courant fourni par la pile sera donnée par l'équation

$$I = \frac{nE}{nr + \frac{R}{x}}.$$

Or chaque lampe ne reçoit qu'un courant d'intensité $\frac{I}{x} = i$; donc $I = ix$. Mais i est connu, puisque l'intensité est imposée; nous pouvons donc calculer x.

$$\frac{nE}{nr + \frac{R}{x}} = ix,$$

$$x = \frac{nE - Ri}{nri} = \frac{20 \times 2,01 - 32 \times 0,6}{20 \times 0,25 \times 0,6} = 7 \text{ lampes}.$$

Il y a intérêt à ce que r soit petit : il faut de plus que nE soit plus grand que Ri, ce qui pouvait être prévu.

Notons que chaque lampe a entre ses bornes la différence de potentiel demandée.

14. *Combien faut-il d'accumulateurs Planté, contenant chacun* 1500gr *de plomb, pour suffire pendant une heure à l'alimentation de* 30 *lampes Edison de* 50 *volts et* 1 *ampère, ayant chacune une résistance de* 40 *ohms à chaud?*

Plaçons encore les lampes en dérivation; il faut $\frac{50}{2,1} = 24$ accumulateurs pour obtenir les 50 volts nécessaires.

Le courant total sera d'au moins 30 ampères; car

$$I = \frac{24 \times 2,1}{\frac{40}{30} + 24 \times 0,01} = 31 \text{ ampères.}$$

Au taux de 36360 coulombs par kilogramme de plomb, chaque accumulateur a une capacité totale de 54540 coulombs dont les $\frac{2}{3}$ sont utilisables, soit 36000 coulombs environ et 864000 pour les 24 piles secondaires.

Nous pouvons, d'après ces données, calculer la durée de l'éclairage : en effet, l'énergie utilisable est de

$$\frac{864000 \times 2,1}{9,81} = 185142^{\text{kgm}}.$$

L'énergie consommée par heure par les 30 lampes est égale à

$$\frac{50 \times 30 \times 3600}{9,81} = 551020^{\text{kgm}}.$$

La durée de l'éclairage sera donc d'environ

$$\frac{185142}{551020} = 0^{\text{h}},34 = 20^{\text{m}}.$$

Pour le prolonger, on emploiera par conséquent trois groupes

de 24 accumulateurs, qu'on réunira en batterie, pour alimenter les 30 lampes pendant une heure.

15. *Un poste téléphonique, desservi par 5 éléments de Leclanché, a consommé* $50^{gr},4$ *de zinc après* 30 *journées qu'on peut estimer à* 12 *heures de travail actif. Quel est le courant moyen et l'énergie totale dépensée?*

$50^{gr},4$ de zinc ont donné

$$\frac{50,4}{0,000337} = 149555 \text{ coulombs.}$$

L'intensité moyenne du débit des piles est par conséquent de

$$\frac{149555}{30 \times 12 \times 3600} = 0,115 \text{ coulomb par seconde.}$$

La dépense d'énergie égale

$$149555 \times 1,45 = 216855 \text{ joules} = 22105^{kgm}.$$

16. *Le courant de* 4 *éléments Daniell, de résistance intérieure* $r = 1^{ohm},5$, *montés en série, traverse un bain de galvanoplastie contenant du sulfate de cuivre de résistance spécifique* 19,10 : *les électrodes, qui sont en platine, ont* 1500^{cmq} *de surface et elles sont écartées de* 3^{cm}; *calculer le poids du dépôt de cuivre formé en cinq minutes.*

Évaluons d'abord la résistance R du bain et sa force électromotrice de polarisation e :

$$R = \frac{19,10 \times 3}{1500} = 0^{ohm},038.$$

La détermination de e est facile, par application de la loi de Thomson:

$$e = J\varepsilon q. \tag{9}$$

Cette formule donne e en unités absolues; pour passer aux

volts, nous exprimerons J en calories-grammes : à cet effet, nous multiplierons la quantité εq par 10 (le coulomb vaut 10^{-1} unités C.G.S.) et nous diviserons le résultat par 10^8, parce que le volt vaut 10^8 unités C.G.S. Il vient donc

$$e = 4,17 \times 10^7 \times 0,00033 \times \frac{29,600}{31,8} 10 \times 10^{-8} \text{ volts}$$
$$= 4,17 \times 0,00033 \times 0,931 = 1^{\text{volt}},28.$$

L'intensité du courant sera

$$I = \frac{4 \times 1,07 - 1,28}{0,038 + 4 \times 1,5} = \frac{3}{6,038} = 0,5 \text{ ampère.}$$

En cinq minutes, il passera $5 \times 60 \times 0,5 = 150$ coulombs; le dépôt sera par conséquent de

$$150 \times 0,00033 = 0^{\text{gr}},0495 \text{ de cuivre.}$$

17. *Quel est le nombre d'éléments Daniell nécessaire pour déposer en une heure 2^{gr} de cuivre dans le bain de sulfate de cuivre du problème précédent en employant une anode soluble de cuivre?*

Dans ce cas, il n'y a pas de polarisation, si le sulfate de cuivre est pur, et le travail du courant consiste en un simple transport de cuivre d'une électrode sur l'autre; la dépense d'énergie se réduit à l'échauffement de l'électrolyte, assimilé à un conducteur métallique.

Un ampère-heure dépose $3600 \times 0,00033022 = 1^{\text{gr}},189$ de cuivre.

Il faut donc une intensité de courant

$$I = \frac{2000}{1189} = 1,69 \text{ ampère.}$$

Cherchons quel est le nombre total d'éléments N, montés

en y groupes de x, nécessaire pour obtenir cette intensité dans les meilleures conditions.

$$N = xy,$$

$$I = \frac{xE}{R + \frac{rx^2}{N}} = \frac{NxE}{NR + rx^2},$$

$$N = \frac{Irx^2}{xE - IR}.$$

Le minimum de N sera donné par l'équation

$$2Irx(xE - IR) - EIRx^2 = 0,$$

$$xE = 2IR,$$

$$x = \frac{2IR}{E} = \frac{2 \times 1,69 \times 0,038}{1,07} = 0,13.$$

La faible résistance du bain permet donc, ainsi qu'on pouvait le prévoir, un simple montage en batterie ; faisons $x = 1$ et il viendra, pour $N = y$,

$$N = \frac{1,69 \times 1,5 \times 1}{1 \times 1,07 - 1,69 \times 0,038} = 2,6.$$

On prendra 3 éléments montés en quantité. L'emploi des électrodes de cuivre est donc avantageux.

18. *Calculer la force électromotrice d'une pile de Volta dans laquelle on remplacerait le zinc par du fer.*

La force électromotrice d'un couple est mesurée par l'équivalent mécanique de l'action chimique qui y est développée par 1 coulomb.

Soit donc x la force électromotrice cherchée ; l'énergie développée par 1 coulomb est égale à $\frac{x}{9,81}$.

Évaluons l'équivalent mécanique de l'action chimique produite : l'équivalent électrochimique ε du fer étant de $0^{gr},000291$, 1 coulomb correspondra à la combinaison de ce poids de

métal : il faut déterminer le nombre de calories développées dans cette réaction. Or les Tables nous donnent la chaleur de formation du sulfate de fer par équivalent. La chaleur q dégagée dans la combinaison de 2gr est $\frac{12,500}{28} = 0,446$.

Le travail produit est par suite $J\varepsilon q$.

Il vient donc, en prenant le kilogrammètre pour unité,

$$\frac{x}{9,81} = 425 \times 0,000291 \times 0,446,$$
$$x = 0^{\text{volt}},53.$$

19. *Établir, par les tables d'Everett, la force électromotrice d'une pile formée de zinc, charbon et eau acidulée.*

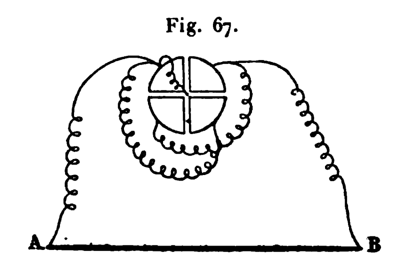
Zinc | charbon.....................	+ 1,096
Zinc | SO^3,HO.....................	+ 0,238
Charbon | SO^3,HO.................	+ 0,035
	1,369

Ce procédé, exact en théorie, ne fournit que des résultats approchés et ne donne aucune indication relative à la polarisation des éléments.

20. *Mesurer, par l'électromètre à quadrants de Thomson, l'intensité d'un courant dans un conducteur, sachant qu'un étalon Latimer Clarke donne à l'aiguille de l'électromètre une déviation δ_1.*

On relie l'aiguille à l'une des paires de quadrants, et ceux-

Fig. 67.



ci séparément aux deux pôles de l'étalon (*fig.* 67) ; c'est ainsi

qu'on a obtenu la déviation δ_1 avec la pile étalon. On peut écrire en utilisant les propriétés connues de l'électromètre :

$$C \sin \delta_1 = a (V_1 - V_2) \left(V_1 - \frac{V_1 + V_2}{2}\right) = \frac{a}{2} (V_1 - V_2)^2,$$

$$\delta_1 = \frac{K}{2} E_1^2.$$

Relions maintenant les deux extrémités du fil AB à l'électromètre, dans les mêmes conditions, il viendra

$$\delta = \frac{K}{2} E^2$$

et, par suite,

$$I = \frac{E}{R} = \frac{E_1}{R} \frac{E}{E_1} = \frac{E_1}{R} \sqrt{\frac{\delta}{\delta_1}}.$$

21. *Une pile de Daniell est reliée aux deux bornes d'un galvanomètre par l'intermédiaire d'une boîte de résistances :* 320 *ohms donnent une déviation* (¹) *de* 30°, 640 *donnent* 41°. *Une pile de Bunsen produit les mêmes déviations avec des résistances de* 610 *et* 1218 *ohms. Quel est le rapport des forces électromotrices des deux éléments ?*

La première pile a produit, dans les deux expériences, des intensités de courant faciles à calculer :

$$I = \frac{E}{R + r + g},$$

$$I' = \frac{E}{R + R' + r + g},$$

en désignant par R′ l'accroissement de résistance égal à 320 ohms.

(¹) Nous supposerons toujours, dans ce problème et dans les suivants, que la déviation observée a été réduite à sa valeur vraie par une graduation préalable du galvanomètre.

Retirant du circuit la pile de Daniell et y substituant celle de Bunsen, nous avons de même

$$I = \frac{E_1}{R_1 + r_1 + g},$$

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_1 + R'_1 + r_1 + g}.$$

On en déduit

$$\frac{E}{R + r + g} = \frac{E_1}{R_1 + r_1 + g},$$

$$\frac{R + r + g}{E} = \frac{R_1 + r_1 + g}{E_1}$$

et

$$\frac{E}{R + R' + r + g} = \frac{E_1}{R_1 + R'_1 + r_1 + g},$$

$$\frac{R'}{E} + \frac{R + r + g}{E} = \frac{R'_1}{E_1} + \frac{R_1 + r_1 + g}{E_1},$$

d'où

$$\frac{E_1}{E} = \frac{R'_1}{R_1} = \frac{608}{320} = 1,9.$$

22. *Un galvanomètre astatique de Thomson, shunté au millième, est mis dans le circuit d'un étalon Post-Office avec une résistance de* 15000 *ohms, et l'on observe une déviation de* 60 *divisions de l'échelle : quelle est la sensibilité ou la formule de mérite de l'instrument ?*

L'intensité du courant dans le galvanomètre est égale à

$$\frac{E}{1000\,R + g} = \frac{E}{1000\,R} = i = \frac{1,074}{15 \times 10^6} \text{ ampère.}$$

En admettant que la déviation soit proportionnelle à cette intensité, ce qui n'est pas éloigné de la vérité, on aura pour le nombre n de divisions correspondant à l'unité de courant

$$n = \frac{60}{i} = \frac{9 \times 10^8}{1,074}.$$

Quelle est dès lors la résistance x du circuit qui, avec le même étalon Post-Office, produirait l'unité de déviation?

$$\frac{1}{n} = \frac{E}{x},$$

$$x = nE = \frac{9 \times 10^8}{1,074} \times 1,074 = 9 \times 10^8.$$

C'est le nombre de mérite du galvanomètre ; il est d'autant plus grand que le galvanomètre est plus sensible.

23. *Une boussole des tangentes étalonnée donne l'intensité des courants par la formule* $I = K \operatorname{tang} \varphi$; *on a commis une erreur* δ *dans la lecture de l'angle* φ ; *quelle est l'erreur* x *commise sur* I ?

$$I + x = K \operatorname{tang}(\varphi + \delta) = K\left(\operatorname{tang}\varphi + \frac{\delta}{\cos^2\varphi}\right),$$

$$x = \frac{K\delta}{\cos^2\varphi} = \frac{I\delta}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{2I\delta}{\sin 2\varphi}.$$

Le minimum de x correspond à $\varphi = 45°$.

24. *On mesure par la boussole des tangentes les intensités de deux courants, dont l'un est sensiblement le double de l'autre; quelles sont les déviations qu'on cherchera à obtenir pour atteindre le maximum de sensibilité des deux observations?*

Soient θ et θ' les deux déviations et n le rapport des intensités :

$$\operatorname{tang}\theta = n \operatorname{tang}\theta'.$$

Il s'agit de trouver la valeur de θ pour laquelle $\theta - \theta'$ devient maximum ; or nous avons

$$\operatorname{tang}(\theta - \theta') = \frac{\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\theta'}{1 + \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\theta'}$$

$$= \frac{n \operatorname{tang}\theta' - \operatorname{tang}\theta'}{1 + n \operatorname{tang}^2\theta'} = \frac{n - 1}{\dfrac{1}{\operatorname{tang}\theta'} + n \operatorname{tang}\theta'}.$$

Le numérateur étant constant, cherchons la valeur qui rend minimum le dénominateur.

Or on peut l'écrire sous la forme

$$\frac{1}{\tang\theta'} + n\tang\theta' = \left(\frac{1}{\sqrt{\tang\theta'}} - \sqrt{n\tang\theta'}\right)^2 + 2\sqrt{n}.$$

Cette expression est minimum pour

$$\frac{1}{\sqrt{\tang\theta'}} = \sqrt{n\tang\theta'};$$

d'où, en faisant n égal à 2,

$$\tang\theta' = \sqrt{\frac{1}{n}} = \tang 35^\circ 15'$$

et

$$\tang\theta = \sqrt{n} = \tang 54^\circ 44'.$$

Ce sont des valeurs équidistantes de 45°, angle de sensibilité maximum des boussoles des tangentes.

25. *Un galvanomètre à réflexion, placé à une distance* $l = 300^{mm}$ *de l'échelle divisée, a donné pour deux courants des déplacements du point lumineux de* $n = 60^{div}$ *et* $n' = 120^{div}$; *on demande le rapport* x *des intensités des deux courants.*

$$\frac{I}{I'} = \frac{\tang\frac{\alpha}{2}}{\tang\frac{\alpha'}{2}} = x.$$

Exprimons $\tang\frac{\alpha}{2}$ en fonction de $\tang\alpha$:

$$\tang\alpha = \frac{2\tang\frac{\alpha}{2}}{1 - \tang^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\tang\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1 + \tang^2\alpha} - 1}{\tang\alpha} = \frac{\sqrt{1 + \frac{n^2}{l^2}} - 1}{\frac{n}{l}}.$$

Le rapport x est donc égal à

$$\frac{\sqrt{l^2+n^2}-l}{\sqrt{l^2+n'^2}-l}\,\frac{n'}{n}=\frac{\sqrt{90000+3600}-300}{\sqrt{90000+14400}-300}\,\frac{2}{1}=\frac{12,4}{22,8}.$$

Les deux courants sont donc loin d'être doubles l'un de l'autre : ils le seraient si l était fort grand par rapport à n et n'.

26. *Deux cadres circulaires, recouverts de fil, sont disposés à angle droit; leur résistance est identique et égale pour chacun d'eux à 1 ohm : une aiguille aimantée est suspendue au centre. On ajoute une résistance x à un des circuits et l'on constate que l'aiguille n'est pas déviée et qu'elle reste dans le méridien, lorsque ce cadre fait avec le méridien un angle α égal à 60°. Déduire de cette observation la valeur de x.*

On a évidemment

$$I\cos\alpha = I'\sin\alpha,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{I}{I'}=\frac{\dfrac{E}{1}}{\dfrac{E}{1+x}}=1+x.$$

On trouve donc

$$1+x=\operatorname{tang}60^\circ=1,73,$$
$$x=0^{\text{ohm}},73.$$

Ce dispositif ingénieux a été proposé par M. Carpentier pour la mesure des résistances, mais la première idée de l'appareil appartient à M. Jenkin.

27. *On veut réduire, par un shunt, l'intensité d'un courant aux $\frac{1}{7}$, dans un galvanomètre ayant 5 ohms de résistance entre les bornes; déterminer la résistance s du shunt et en déduire celle de l'ensemble x des deux circuits dérivés.*

Soit n le pouvoir multiplicateur du shunt, c'est-à-dire le

nombre par lequel il faut multiplier l'intensité observée pour calculer celle du courant principal.

$$(3\ bis)\qquad s = \frac{G}{n-1} = \frac{G}{\frac{7}{3}-1} = \frac{3}{4}G = 3,75 \text{ ohms},$$

$$(2)\qquad x = \frac{1}{\frac{1}{G}+\frac{1}{s}} = \frac{G}{\frac{G+s}{s}} = \frac{G}{n} = 2,14 \text{ ohms}.$$

En pratique, au lieu de mesurer s, on trouve plus facile et plus sûr de faire varier la longueur du fil de shunt jusqu'à ce que la résistance totale soit devenue $\frac{G}{n}$.

28. *Un galvanomètre de* 10 *ohms de résistance, ayant été shunté par un fil de résistance s égale à* 3,33 *ohms, on se propose de calculer la valeur de la résistance compensatrice σ à introduire dans le circuit principal, pour que le courant y garde la même valeur.*

Nous devons avoir

$$G = \frac{G}{n} + \sigma,$$

$$\sigma = G\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Or,

$$n = \frac{G+s}{s}.$$

Donc

$$\sigma = \frac{G^2}{G+s} = \frac{100}{13,33} = 7,50 \text{ ohms}.$$

29. *Un galvanomètre, de résistance x inconnue, est mis en circuit avec une résistance* R *de* 200 *ohms; un shunt de* 20 *ohms dérivant une partie du courant, on relève une déviation δ; sans shunt, il faut porter la résistance à une valeur* R_1 *égale à* 2500 *ohms pour ramener la déviation à la même valeur δ. Quelle est la résistance x?*

Dans le premier cas,

$$I = \frac{Es}{sx + Rx + Rs}.$$

Dans le second cas,

$$I = \frac{E}{R_1 + x}.$$

On en déduit

$$x = \frac{R_1 - R}{R} s = 230 \text{ ohms}.$$

30. *On met un galvanomètre dans le circuit d'une pile de* 10 *éléments Daniell, avec une boîte de résistances; pour deux résistances* R *et* R' *de la boîte égales à* 62 *et* 110 *ohms, on relève des déviations de* 38° *et* 25°. *Faire, sur ces données, le tarage du galvanomètre.*

Nous avons

$$I = K\delta = \frac{nE}{nr + R},$$

$$I' = K\delta' = \frac{nE}{nr + R'};$$

d'où

$$\frac{1}{K\delta'} - \frac{1}{K\delta} = \frac{R' - R}{nE}$$

et

$$K = \frac{nE}{R' - R}\left(\frac{1}{\delta'} - \frac{1}{\delta}\right) = \frac{10,7}{48}\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{38}\right) = 0.003.$$

31. *On intercale dans un circuit quelques éléments Daniell, une boussole des tangentes, que l'on veut étalonner, et une résistance de* 20 *ohms, dont les extrémités présentent une différence de potentiel égale à* 2,10 *volts; la déviation est de* 35°; *quel coefficient* K *permettra de passer de la déviation aux ampères* [1]?

$$I = K \operatorname{tang}\varphi = \frac{2,10}{20} = 0,105,$$

$$K = \frac{0,105}{\operatorname{tang} 35°} = 0,0735.$$

(1) L'étalonnage des galvanomètres, auquel se rapportent ces deux exer-

32. *Un courant, traversant un voltamètre à volume dont l'eau est rendue conductrice par l'acide phosphorique, a libéré en une minute* 60^{cc} *d'hydrogène, sous la pression de* 750^{mm} *et à la température de* $20°$; *quelle est l'intensité de ce courant?*

Calculons d'abord le volume à zéro et 760^{mm} du gaz libéré :

$$v = 60\,\frac{750}{760}\,\frac{1}{1+\alpha t} = 55^{cc},16.$$

Il pèse

$$0,05516 \times 89,6 = 4^{mmg},94.$$

Le courant en a donc mis en liberté par seconde

$$\frac{4,94}{60} = 0^{mmg},082333.$$

Or un coulomb libère $0^{mmg},010384$.

Donc

$$I = \frac{82333}{10384} = 7,9 \text{ ampères.}$$

33. *Une boussole des tangentes introduite, avec une résistance* R *de* 2 *ohms, dans le circuit d'une pile de Reynier marque* $54°$ *de déviation; cette déviation tombe à* $36°$, *quand la résistance est portée à* 8 *ohms; quelle est la résistance* G *de cette boussole?*

$$I = K \operatorname{tang}\varphi = \frac{E}{G+R},$$

$$I' = K \operatorname{tang}\varphi' = \frac{E}{G+R'},$$

$$(G+R)\operatorname{tang}\varphi = (G+R')\operatorname{tang}\varphi',$$

$$G = \frac{R'\operatorname{tang}\varphi' - R\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varphi'} = 4,7 \text{ ohms.}$$

---

cices, ne fournit que des résultats incertains, par suite des variations de l'intensité horizontale du magnétisme terrestre dans les édifices, variations dont nos expériences ont fait ressortir l'extrême importance. Cf. p. 251.

34. *On introduit successivement dans le circuit d'une pile, de résistance intérieure négligeable, une résistance de* 10 *ohms, puis une autre résistance inconnue; déterminer cette résistance, sachant que les intensités du courant ont été égales à* 0,8 *et* 0,6 *ampère et que l'ampèremètre employé pour cette mesure a une résistance de* 1,5 *ohm.*

$$I(R+G) = I_1(x+G),$$

$$I_1 x = I(R+G) - I_1 G,$$

$$x = \frac{I}{I_1}(R+G) - G,$$

$$x = \frac{0,8}{0,6}(10+1,5) - 1,5 = 13,8 \text{ ohms}.$$

35. *Un conducteur en cuivre de* 100^{km} *de longueur ne doit pas avoir une résistance supérieure à* 50 *ohms; quels seront son diamètre et sa section?*

$$R = \frac{l}{cs},$$

$$s = \frac{l}{cR} = \frac{10^7}{63,13 \times 10^{-5} \times 50 \times 10^9} = 0^{cmq},3168,$$

$$d = 0^{cm},63.$$

36. *Une pile, dont un des pôles est à la Terre, envoie son courant dans une boîte de résistances graduées et dans un fil de résistance x inconnue, relié lui-même au sol* (*fig.* 68); *pour* 60 *ohms de résistance* R *de la boîte, on trouve à l'électromètre des potentiels* V_1 *et* V_2 *égaux à* 2,8 *et* 1,5 *volts; calculer la résistance x du fil.*

La ligne AB marque la loi de décroissance des potentiels et l'on a évidemment

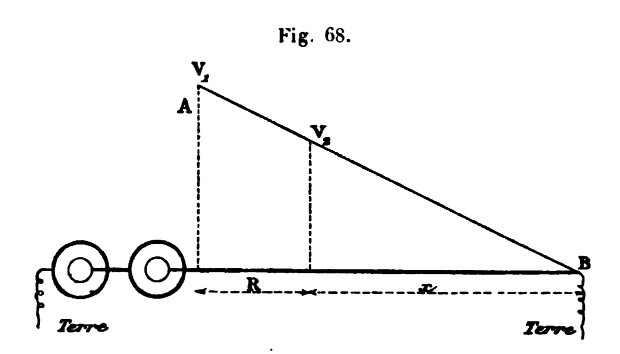
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R+x}{x},$$

d'où

$$x = R \frac{V_2}{V_1 - V_2} = 56 \text{ ohms.}$$

Un grand nombre de problèmes sont simplifiés d'une ma-

Fig. 68.



nière remarquable par de semblables constructions graphiques dont il nous suffit d'avoir donné un seul exemple.

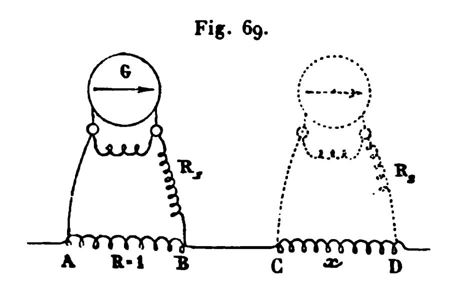
37. *Un courant, qui traverse une lampe à incandescence. produit entre les attaches de la lampe une différence de potentiel de* 25 *volts et une différence de* 12,5 *volts entre les extrémités d'un fil de* 10 *ohms; quelle est la résistance de cette lampe à chaud?*

$$V = IR, \qquad V' = Ix,$$
$$x = R \frac{V'}{V} = 20 \text{ ohms.}$$

38. *On a à mesurer une très petite résistance x, que l'on veut comparer à l'unité de résistance; à cet effet, on intercale à la suite, dans le circuit d'une pile, l'ohm-étalon* AB *et le fil x* (*fig.* 69); *puis on relie les points* A *et* B *aux bornes d'un galvanomètre Thomson, shunté au $\frac{1}{100}$, de résistance* G, *et l'on règle sa déviation $d_1 = 30$ divisions par une résistance* R_1; *même opération pour* CD, *et détermination d'une dévia-*

tion $d_2 = 28,5$ *divisions par une résistance* R_2, *sans shunt. Déduire de ces deux opérations la valeur de* x, *sachant que* $R_1 = 172$ *ohms,* $R_2 = 510$ *ohms et* $G = 25$ *ohms.*

Fig. 69.



Soit V_1 la différence de potentiel entre A et B; le courant I_1 qui traverse le galvanomètre est égal à

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1 + G'} \times \frac{1}{100} = K d_1.$$

En appelant de même V_2 la différence de potentiel entre C et D, nous aurons

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2 + G} = K d_2.$$

Dans la première équation, G' est la résistance totale du galvanomètre et du shunt; dans la seconde, G est la résistance seule de l'instrument; mais nous savons que

$$(2 \text{ et } 3 \textit{ bis}) \qquad G' = \frac{1}{\frac{1}{G} + \frac{1}{S}} = \frac{G}{\frac{G+S}{S}} = \frac{G}{n} = \frac{G}{100}.$$

Il vient donc

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{V_1(R_2 + G)}{V_2\left(R_1 + \frac{G}{100}\right)100} = \frac{V_1(R_2 + G)}{V_2(100 R_1 + G)};$$

d'autre part,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{x}.$$

On en déduit

$$x = \frac{d_2}{d_1} \frac{R_2 + G}{100 R_1 + G} = \frac{28,5}{30} \frac{510 + 25}{100 \times 172 + 25} = 0,029 \text{ ohms}.$$

39. *Un galvanomètre différentiel est mal réglé et les constantes* K *et* K' *de ses deux bobines sont inégales : déterminer la valeur du rapport* $\frac{K}{K'}$ *par l'observation de ce fait que les résistances des deux bobines sont* $g = 4,8$ *et* $g' = 5,2$ *ohms, et qu'un courant bifurqué donne une déviation* δ *égale à zéro pour un ajustement de résistances* ρ *et* ρ' *égales à* 21 *et* 20 *ohms.*

$$\frac{I}{\frac{1}{g+\rho}} = \frac{I'}{\frac{1}{g'+\rho'}},$$

$$\delta = KI - K'I' = 0,$$

$$\frac{K}{K'} = \frac{I'}{I} = \frac{g+\rho}{g'+\rho'} = \frac{4,8+21}{5,2+22} = 0,948.$$

40. *Une pile donne un courant de* 2 *ampères quand elle ne comprend dans son circuit qu'un ampère-mètre ; cette intensité tombe à* $0^{\text{amp}},325$ *et* $0^{\text{amp}},191$ *quand on introduit d'abord dans le circuit une résistance d'un ohm, puis une résistance inconnue* x*; calculer* x.

Soit $\rho + G$ la résistance de l'ampère-mètre et des fils de jonction, et I l'intensité du courant.

$$I = \frac{E}{\rho + G}.$$

Nous aurons ensuite

$$I_1 = \frac{E}{\rho + G + 1}, \qquad I_2 = \frac{E}{\rho + G + x}.$$

Nous connaissons donc x :

$$x = \frac{I - I_1}{I - I_2} \frac{I_2}{I_1} = 3^{\text{ohms}},4.$$

41. *Un fil conducteur, recouvert de gutta-percha, est plongé dans une cuve d'eau acidulée, l'un des bouts étant isolé et l'autre relié à la paroi de la cuve par l'intermédiaire d'un galvanomètre et d'une pile : dans ces conditions, l'intensité du courant est de* 150 *milli-ampères. Ce même galvanomètre, shunté au* $\frac{1}{1000}$, *indique un courant de* 630 *milli-ampères, quand le courant est lancé dans une résistance* $R = 20$ *ohms. Quelle est la résistance* x *de l'enveloppe isolante du fil?*

On voit sans peine que

$$E = 1000\, I_2 \left(r + \frac{G}{1000} + R\right) = I_1 (r + G + x).$$

En négligeant la résistance intérieure r de la pile et celle du galvanomètre, nous aurons

$$1000 \frac{I_2}{I_1} = \frac{1000 (G + x)}{G + 1000\, R},$$

$$x = 1000\, R \frac{I_2}{I_1} = 84000 \text{ ohms}.$$

42. *Une pile de* 25 *éléments Callaud, montés en série* (*fig.* 70), *est employée à charger un condensateur* C; *puis, les premières communications étant supprimées, les bornes du condensateur sont rattachées à celles d'un galvanomètre* G, *qui est traversé par un courant de décharge et qui marque une déviation* $\alpha = 15°$. *On répète les mêmes essais après avoir shunté la pile par une résistance* S *de* 50 *ohms : la déviation* $\alpha_2 = 8°$. *En déduire la résistance intérieure r de la pile.*

Avant l'emploi du shunt, on peut admettre que

$$\alpha_1 = \frac{E}{R + r},$$

R désignant la résistance fort grande du condensateur. Avec le shunt S, on aura

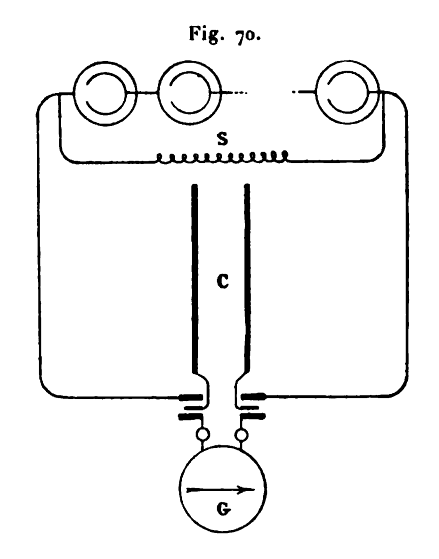
$$(3\ bis) \qquad \alpha_2 = \frac{E}{R + r\dfrac{S}{r + S}} \frac{S}{r + S} = \frac{ES}{R(r + S) + rS}.$$

Égalant ces deux valeurs de E, on obtient

$$\alpha_1(R+r)=\alpha_2\frac{Rr+RS+rS}{S},$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{Rr+RS+rS}{RS+rS}=\frac{r+S+\frac{rS}{R}}{S+\frac{rS}{R}}=\frac{r+S}{S}.$$

Fig. 70.



Enfin

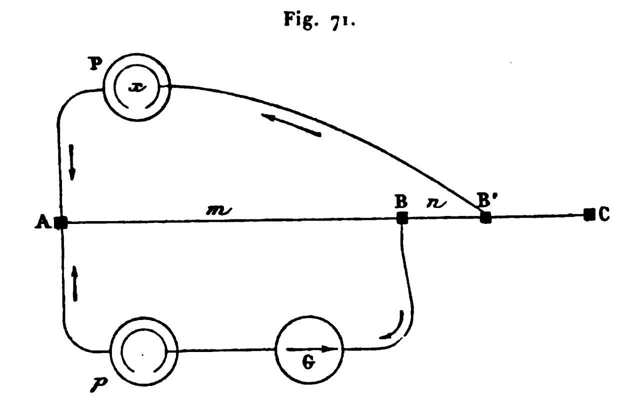
$$r=S\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2}=50\times\frac{15-8}{8}=43^{\text{ohms}},75;$$

soit, par élément Callaud, $1^{\text{ohm}},75$.

43. *Pour mesurer la résistance intérieure d'un élément de pile* P, *on lui oppose un élément de moindre force électromotrice* p, *et l'on cherche deux positions* B *et* B' *d'un curseur sur le fil* AC *réduisant au zéro le galvanomètre* G : *on a trouvé une première fois* $m=52$ *et* $n=18$, *une seconde fois* $m'=73$ *et* $n'=26$. *Déterminer* x : *la résistance des fils du circuit* ABC *est négligeable* (*fig.* 71).

Si nous appelons E et e les forces électromotrices des élé-

Fig. 71.



ments P et p, nous aurons, attendu que l'intensité du courant est nulle en ApGB,

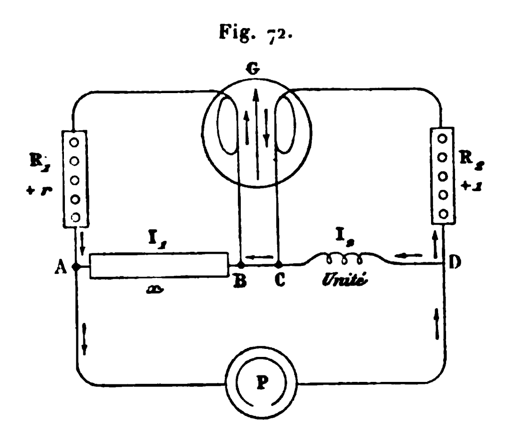
$$\mathrm{E} = (x + m + n)i, \qquad e = mi,$$
$$\mathrm{E} = (x + m' + n')i', \qquad e = m'i',$$
$$\frac{\mathrm{E}}{e} = \frac{x + m + n}{m} = \frac{x + m' + n'}{m'},$$
$$\frac{x + n}{m} + 1 = \frac{x + n'}{m'} + 1,$$
$$x = \frac{m'n - n'm}{m - m'} = 1^{\text{ohm}},81.$$

44. *On se propose de mesurer la résistance d'un prisme d'argent* AB; *pour cela, on l'introduit, avec l'étalon de résistance* CD, *dans le circuit d'une pile constante* P (*fig.* 72) *et l'on greffe sur la barre et sur l'étalon deux dérivations,* A R_1 G B *et* D R_2 G C, *comprenant les boîtes de résistances* R_1 *et* R_2 *et le double circuit d'un galvanomètre différentiel exactement réglé* G. *On ajuste les résistances relatives des dérivations de manière à réduire le galvanomètre au zéro; cela fait, on introduit d'un côté, en* R_2, 1 *ohm, et l'on cherche quelle résistance r, ajoutée de l'autre côté, ramènera l'aiguille au*

zéro; démontrer que la résistance x de AB est précisément égale à r.

En effet, l'égalité des intensités I des courants dans les dérivations entraîne l'égalité des courants I_1 et I_2 en AB et

Fig. 72.



CD; les lois de Kirchhoff donnent, d'autre part, dans l'opération de réglage,

$$I_1 x = IR_1,$$
$$I_2 = IR_2,$$
$$x = \frac{R_1}{R_2}.$$

La seconde opération donne encore

$$I'_1 x = I'(R_1 + r),$$
$$I'_2 = I'(R_2 + 1),$$

d'où

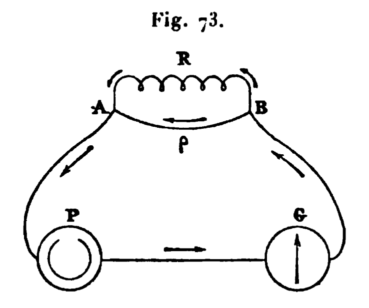
$$x = \frac{R_1 + r}{R_2 + 1} = r.$$

Cette ingénieuse méthode a été inventée par Kirchhoff et appliquée à la mesure des conductibilités spécifiques.

45. *La pile* P *produit dans le circuit* APGB (*fig.* 73) *un courant d'intensité* I, *mesurée par le galvanomètre* G; *une*

dérivation R *est greffée en* AB *sur un fil de résistance* ρ; *quelle est la différence de potentiel* $V_1 - V_2$ *entre ces points* A *et* B?

Fig. 73.

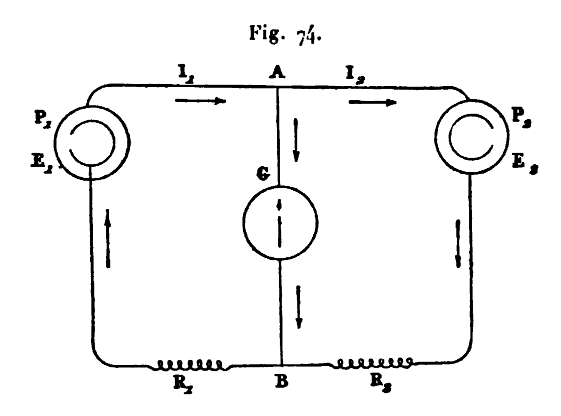


On a évidemment $V_1 - V_2 = i\rho$, si nous appelons i l'intensité du courant entre A et B; d'où

$$V_1 - V_2 = I \frac{R\rho}{R + r}.$$

46. *Deux piles* P_1 *et* P_2 *sont réunies par leurs pôles de nom contraire; soient* I_1, E_1, R_1, I_2, E_2, R_2, *les intensité, force élec-*

Fig. 74.



tromotrice et résistance dans les circuits AP_1B *et* AP_2B, *et* I *l'intensité en* AB (*fig.* 74). *On ajuste* R_2 *de telle manière que*

le galvanomètre G marque zéro; démontrer que

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

En A, nous avons, d'après la première loi de Kirchhoff,

$$I_1 = I + I_2;$$

de plus, les circuits ABP_1A et ABP_2A nous donnent

$$R_1 I_1 + GI = E_1,$$
$$R_2 I_2 - GI = E_2;$$

d'où

$$I_2 = \frac{E_2 + GI}{R^2}$$

et

$$R_1(I + I_2) + GI = E_1.$$

Par suite,

$$R_1\left(I + \frac{E_2 + GI}{R_2}\right) + GI = E_1,$$

$$I = \frac{R_2 E_2 - R_1 E_1}{G(R_1 + R_2) + R_1 R_2};$$

mais

$$I = 0.$$

Donc

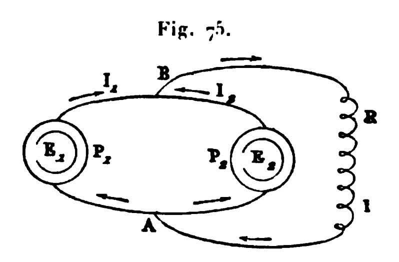
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

La méthode de Lumsden est basée sur cette démonstration; comme le procédé de Poggendorff-Bosscha, celui-ci n'exige pas la connaissance des résistances intérieures des éléments de pile.

47. *Deux piles de force électromotrice* E_1 *et* E_2 *sont montées en quantité et elles travaillent sur un circuit extérieur de résistance* R; *leurs résistances intérieures sont* r_1 *et* r_2; I, I_1 *et* I_2 *sont les intensités des courants; quelle valeur de* R *annule le courant* I_2 (*fig.* 75)?

Les deux piles sont montées par leurs pôles de même nom ; dans certaines conditions la pile E_2 serait électrolysée : c'est

Fig. 75.



lorsque R est très grand ; une valeur moindre de la résistance annulera I_2.

Considérons d'abord le circuit AP_2B comme dérivé par rapport à la pile P_1 ; il serait traversé par un courant d'intensité $\frac{+E_1 R}{Rr_1 + Rr_2 + r_1 r_2}$; mais la force électromotrice E_2 donnerait naissance à un courant $\frac{-E_2(r_1 + R)}{Rr_1 + Rr_2 + r_1 r_2}$.

Il vient donc

$$I_2 = \frac{E_1 R - E_2(r_1 + R)}{Rr_1 + Rr_2 + r_1 r_2}.$$

Le courant sera nul lorsque nous aurons

$$R = \frac{E_2}{E_1 - E_2}.$$

48. *Une pile de Poggendorff, de force électromotrice* E_1 *et de résistance* r_1*, est mise en simple circuit avec un rhéomètre quelconque de résistance* G *et une boîte de résistances : deux résistances* R_1 *et* $(R_1 + \rho_1)$ *de cette boîte, égales à* 200 *et* 210 *ohms, donnent deux déviations* φ *et* φ'*. Avec une pile de Daniell* (E_2, r_2) *il faudrait des déviations* R_2 *et* $(R_2 + \rho_2)$*, égales à* 102 *et* 97 *ohms, pour reproduire les mêmes déviations* φ *et* φ'*. En déduire* E_1 *en fonction de* E_2*.*

Il est facile de voir que l'on a

$$\frac{E_1}{r_1 + G + R_1} = \frac{E_2}{r_2 + G + R_2}$$

et

$$\frac{E_1}{r_1+G+R_1+\rho_1} = \frac{E_2}{r_2+G+R_2+\rho_2};$$

d'où l'on tire

$$\frac{\rho_1}{E_1} + \frac{r_1+G+R_1}{E_1} = \frac{\rho_2}{E_2} + \frac{r_2+G+R_2}{E_2},$$

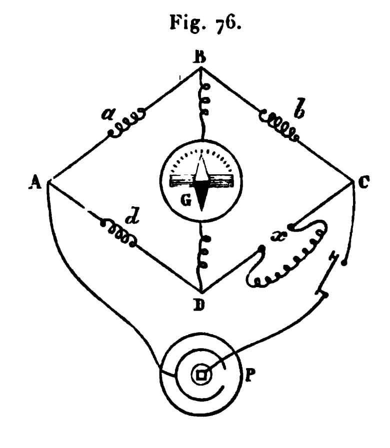
et enfin

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

$$E_1 = E_2 \times \frac{10}{5} = 2,14 \text{ volts.}$$

49. *Les branches d'un pont de Wheatstone ayant des résistances* $a = 1000$ *ohms et* $d = 10$ *ohms, on observe qu'on ne*

Fig. 76.



peut réaliser l'équilibre exact du pont; en effet, la résistance b *étant réglée à* 130 *ohms, on obtient une déviation de* $+5^{\text{div}}$, *tandis que pour* 131 *ohms on relève une déviation de* -6^{div}, *de l'autre côté du zéro. Comment peut-on calculer néanmoins la valeur exacte de la résistance inconnue* x ?

La solution de cet intéressant problème a été donnée par

M. Kempe, dont nous reproduirons presque entièrement les calculs.

Soient i_a, i_b, i_x, i_d les intensités des courants dans les branches de résistance a, b, x et d, i l'intensité dans le pont, I, l'intensité dans le circuit APC; G est la résistance du galvanomètre placé sur le pont et R la résistance de la pile et des fils d'attache.

Les lois de Kirchhoff donnent six relations entre la force électromotrice E, les résistances et les intensités.

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{I} = i_a + i_d,$$
$$\text{(2)} \qquad i_b = i + i_a,$$
$$\text{(3)} \qquad i_x = i_d - i,$$
$$\text{(4)} \qquad \mathrm{E} = \mathrm{IR} + id + i_x,$$
$$\text{(5)} \qquad 0 = i_a a - i_d d - i\mathrm{G},$$
$$\text{(6)} \qquad 0 = i_x x - i_b b - i\mathrm{G}.$$

De ce système d'équations il s'agit de déduire i, c'est-à-dire l'intensité du courant qui traverse le galvanomètre; pour cela, tirons i_a de l'équation (1) et substituons cette valeur dans les équations (2) et (5), les seules contenant i_a; tirons de même i_d de l'équation (3), et portons sa valeur dans les équations (1), (4) et (5); même travail pour i_b et i_x : nous obtenons ainsi entre i et I deux relations, que voici :

$$(\mathrm{I} - i)a - i(d + \mathrm{G}) - (a + d)\frac{\mathrm{E} - id - \mathrm{IR}}{d + x} = 0$$

et

$$\mathrm{I}b + i\mathrm{G} - (x + b)\frac{\mathrm{E} - id - \mathrm{IR}}{d + x} = 0.$$

Il reste à éliminer I entre ces deux équations, en les divisant l'une par l'autre; on obtient

$$\frac{[\mathrm{R}(x + b) + b(d + x)]}{[\mathrm{R}(a + d) + a(d + x)]} = -\frac{i(d\mathrm{G} + x\mathrm{G} + db + dx) + \mathrm{E}(x + b)}{i(ax + dx + d\mathrm{G} + x\mathrm{G}) + \mathrm{E}(a + d)};$$

d'où enfin

$$i = \frac{E(ax - db)}{\left\{\begin{matrix} G[(a+b)(d+x) + R(a+d+x+b)] \\ + R(x+b)(a+d) + dx(a+b) + ab(d+x) \end{matrix}\right\}},$$

équation que nous écrirons sous la forme

$$i = \frac{A}{B}.$$

L'équilibre a lieu lorsque

$$ax = bd, \qquad \text{soit} \qquad x = \frac{d}{a} b.$$

Appelons b' la résistance trop petite et b'' la résistance trop grande de l'essai : nous aurons

$$i' = \frac{E(ax - db')}{B'},$$

$$-i'' = \frac{E(ax - db'')}{B''}.$$

Or, b' et b'' sont presque égaux; donc B′ et B″ le sont aussi et l'on peut écrire le rapport

$$-\frac{i'}{i''} = \frac{ax - db'}{ax - db''}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{d}{a} \frac{i' b'' + b' i''}{i' + i''};$$

ou, en tenant compte de ce que $b'' = b' + 1$,

$$x = \frac{d}{a}\left(b' + \frac{i'}{i' + i''}\right).$$

Passons aux valeurs numériques :

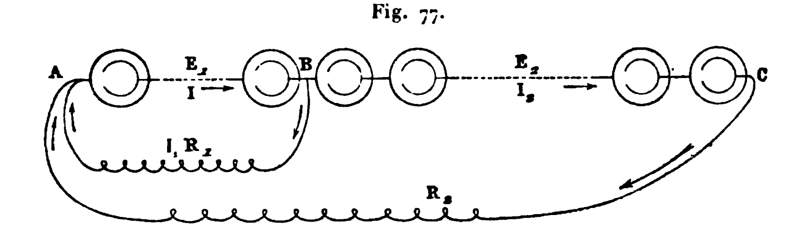
$$x = \frac{10}{1000}\left(130 + \frac{5}{5+6}\right) = 1,304 \text{ ohm}.$$

La règle est très simple : on augmente la valeur la plus faible de la résistance b du quotient d'une déviation à la somme des déviations observées.

50. *Une pile d'éléments de Bunsen, en nombre illimité, mais suffisant, est destinée à alimenter deux circuits de résistance* $R_1 = 3$ *ohms et* $R_2 = 10$ *ohms; comment reliera-t-on ces deux circuits aux éléments pour avoir une même intensité de 2 ampères dans chacun d'eux?*

La disposition à employer est celle de la *fig.* 77. On mon-

Fig. 77.



tera la pile en deux sections AB et BC, la première ne desservant qu'un circuit, le second circuit les renfermant toutes deux.

Nous appellerons E_1 la force électromotrice de la première section et E_2 celle de la seconde; r_1 et r_2 leurs résistances intérieures; I_1 et I_2 les intensités des courants dans les deux circuits dérivés; R_1 et R_2 leurs résistances, et enfin I l'intensité du courant principal dans la première section.

On peut écrire $I = I_1 + I_2$

$$E_1 = I r_1 + I_1 R_1,$$
$$E_1 + E_2 = I r_1 + I_2(r_2 + R_2),$$
$$E_2 = I_1(R_2 - R_1 + r_2).$$

Mais on veut que $I_1 = I_2$; les équations se simplifient donc et deviennent

$$I = 2 I_1,$$
$$E_2 = I_1(R_2 - R_1 + r_2),$$
$$E_1 = I_1(R_1 + 2 r_1).$$

Si les résistances intérieures étaient négligeables, la solu-

tion du problème serait simple; il faudrait que l'on eût

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{R_2 - R_1} = \frac{3}{7}.$$

Or 3 éléments Bunsen donneraient, sur un circuit de 3 ohms, l'intensité demandée. On monterait donc 10 éléments en deux séries de 3 et de 7.

Mais on ne peut négliger les résistances intérieures, quand les résistances des circuits extérieurs sont faibles, et il faudra aborder généralement la solution complète de la question. Dans le cas proposé, nous aurons

$$E_2 = n_2 \times 1{,}90 = 2(7 + n_2 \times 0{,}10),$$
$$n_2 = 8{,}3,$$
$$E_1 = n_1 \times 1{,}90 = 2(3 + 2n_1 \times 0{,}10),$$
$$n_1 = 4.$$

La pile comptera 13 éléments, montés en deux séries de 9 et de 4.

51. *Dans le pont de Wheatstone à fil, de M. Forster, on est amené quelquefois à introduire des résistances égales inconnues aux extrémités du fil divisé, dans des vides ménagés à cet effet dans les conducteurs de cuivre de l'instrument; comment peut-on évaluer ces résistances en longueurs équivalentes du fil à curseur?*

Intercalons dans les deux branches du pont deux résistances connues, a et b, et plaçons le curseur dans la position qui réduit à zéro le courant du pont : nous aurons

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{1000 - m}.$$

Insérons maintenant, dans le vide de droite par exemple, la résistance dont on cherche la longueur équivalente m_1 en millimètres du fil à curseur; on fera une nouvelle lecture m'

et l'on pourra encore poser

$$\frac{a}{b} = \frac{m' + m_1}{1000 - m'};$$

d'où

$$a(1000 - m) = bm,$$
$$a(1000 - m') = b(m' + m_1),$$
$$m_1 = (m - m')\frac{a + b}{b}.$$

52. *Deux résistances, que l'on veut comparer, sont placées bout à bout et attachées aux extrémités d'une pile de 10 éléments identiques, réunis en série. Entre le point de jonction des deux résistances et un point de la pile, on jette un pont contenant un galvanomètre sensible et l'on cherche quelle position du fil d'attache réduira le courant à zéro : on constate de la sorte que la pile doit être partagée en deux sections de 4 et de 6 éléments. Quel est le rapport des résistances?*

Égalons les intensités des courants des deux branches : ils sont égaux, puisque le pont est réduit à zéro. Pour n_1 éléments en tout et deux sections, formées l'une de $n_1 - n$, l'autre de n éléments, on écrira

$$\frac{nE}{R + nr} = \frac{(n_1 - n)E}{R_1 + (n_1 - n)r} = \frac{n_1 E}{R + R_1 + n_1 r}.$$

Il en résulte que

$$\frac{R}{R_1} = \frac{n}{n_1 - n} = \frac{6}{4}.$$

53. *Dans le circuit d'une pile constante, on introduit à la suite deux boîtes de résistance* A *et* B, *dont on débouche une série de résistances* a *et* b, a' *et* b', a'' *et* b'', *etc., telles que*

$$a + b = a' + b' = a'' + b'' = \ldots = R.$$

La force électromotrice de la pile est E *et sa résistance inté-*



rieure r; déterminer les différences de potentiel entre les bornes de A pour diverses valeurs de a.

Appelons r la résistance des éléments de la pile et E leur force électromotrice :

$$x = E\frac{a}{r+R} = Ka.$$

Les différences de potentiel sont proportionnelles à a. M. Bouty a très heureusement adapté ce dispositif à la mesure des forces électromotrices.

54. *Un câble de* 100 *kilomètres a une résistance de* 15^ohms^,2 *par kilomètre : un accident étant survenu, on lui trouve une résistance totale* $R_1 = 1152$ *ohms, quand son extrémité éloignée est isolée, et une résistance* $R_2 = 918$ *ohms, quand cette extrémité est reliée au sol. A quelle distance du lieu d'essai se trouve le défaut?*

Soient x la résistance de la portion de ligne comprise entre l'origine et le point défectueux, y la résistance de l'autre portion, ρ la résistance du défaut, R la résistance totale de la ligne.

$$R = x + y.$$

Dans la première épreuve, on a

$$x + \rho = R_1,$$
$$\rho = R_1 - x.$$

La seconde épreuve fournit cette autre relation

$$x + \frac{\rho y}{\rho + y} = R_2,$$

d'où

$$x + \frac{(R_1 - x)(R - x)}{R_1 + R - 2x} = R_2$$

ou enfin

$$x^2 - 2xR_2 - R(R_1 - R_2) + R_1R_2 = 0.$$

Cette équation donne

$$x = R_2 \pm \sqrt{(R_1 - R_2)(R - R_2)}.$$

La valeur négative du radical répond seule au problème, puisque x doit être plus petit que R_2 : tous calculs faits, on trouve

$$x = 494^{\text{ohms}},6.$$

La distance du défaut est par suite de

$$\frac{496,6}{15,2} = 32671^{\text{m}}.$$

55. *Une ligne télégraphique, de* 850 *kilomètres de longueur, étant intercalée dans le circuit d'une pile* P (E, r) *et d'un galvanomètre* G, *avec retour par la terre, est traversée par un courant d'intensité* I = 60 *milliampères; le circuit étant fermé par un conducteur de* 1000 *ohms, l'intensité devient égale à* I_1 = 36 *milliampères. Quelle est la résistance d'isolement kilométrique du câble?*

$$I = \frac{E}{R + r + G},$$

$$I_1 = \frac{E}{1000 + r + G},$$

$$R = \frac{I_1}{I}(1000 + r + G) - r + G = \frac{I_1}{I}\,1000 = 600.$$

L'isolement par kilomètre est donc égal à

$$850 \times 600 = 510000 \text{ ohms}.$$

56. *On charge tour à tour un même condensateur à l'aide de deux piles, ayant des forces électromotrices* E_1 *et* E_2, *et on le décharge à travers un galvanomètre de* 25 *ohms de résistance, shunté dans le premier cas par* 15 *ohms, dans le second cas par* 5 *ohms; la déviation est sensiblement la même dans les deux expériences. On demande le rapport des deux forces électromotrices?*

Quand la décharge s'effectue à travers une faible résistance. l'écoulement est instantané, et la déviation du galvanomètre, donc l'intensité du courant, est proportionnelle à la charge du condensateur et, par suite, au potentiel de charge, car $Q = CE$. Soient donc I_1 et I_2 les intensités du flux de décharge, S_1 et S_2 les résistances des shunts, et G celle du galvanomètre : les intensités du courant sont, dans le galvanomètre,

$$(3\ bis) \qquad I_1 \frac{S_1}{G + S_1} \quad \text{et} \quad I_2 \frac{S_2}{G + S_2};$$

on peut donc écrire

$$I_1 \frac{S_1}{G + S_1} = I_2 \frac{S_2}{G + S_2}$$

et, conséquemment,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{\dfrac{S_2}{G + S_2}}{\dfrac{S_1}{G + S_1}} = \frac{(G + S_1) S_2}{(G + S_2) S_1}.$$

Les forces électromotrices sont donc dans le rapport des pouvoirs multiplicateurs des shunts.

Passant aux nombres, nous trouvons

$$\frac{E_1}{E_2} = 0,44.$$

57. *Un condensateur circulaire est formé de deux plateaux de* 10^{cm} *de diamètre, séparés par une couche d'air de* 1^{cm}; *quelle est sa capacité en microfarads, en négligeant l'influence des bords?*

$$C = \frac{S}{4\pi e} = \frac{78,54}{4 \times 3,1416 \times 1} = 6,25 \text{ unités électrostatiques.}$$

Or le rapport des unités électromagnétiques de capacité aux unités électrostatiques de capacité est égal à v^2 et les valeurs

numériques des capacités elles-mêmes sont entre elles dans le rapport $\frac{1}{v^2}$: en effet,

$$\frac{L^{-1}T^2}{L} = L^{-2}T^2 = \left(\frac{1}{v}\right)^2;$$

il y a donc v^2 unités électrostatiques dans l'unité électromagnétique, soit $3^2 \times 10^{20}$. En tenant compte de ce que le farad égale 10^{-9} unités C.G.S. et que le microfarad est le millionième du farad, on voit qu'il faut diviser la capacité électrostatique par

$$\frac{9 \times 10^{20}}{10^9 \times 10^6} = 9 \times 10^5.$$

Donc

$$C = \frac{6,25}{9 \times 10^5} = 0,695 \times 10^{-5} \text{ microfarads.}$$

58. *Comparer au farad la capacité de la Terre.*

La capacité de la Terre est égale à son rayon en unités électrostatiques, soit à $6,3709 \times 10^8$ centimètres. Divisant par v^2, nous trouvons $0,71 \times 10^{-12}$ unités C.G.S., ou $0,71 \times 10^{-3}$ farads.

La capacité de la Terre est donc le $\frac{1}{1400}$ du farad.

59. *Un condensateur de $\frac{1}{10}$ de microfarad, chargé à un potentiel déterminé, donne par décharge dans un galvanomètre 35° de déviation ; on le recharge dans les mêmes conditions et on le met en communication par un fil long et fin avec un second condensateur, de capacité inconnue x : après quoi, on l'isole et on le décharge de nouveau à travers le galvanomètre. La déviation n'est plus que de 28°. Quelle est la capacité du second condensateur ?*

Quand on fait communiquer deux condensateurs A et B, l'un chargé, l'autre à l'état neutre, la charge du premier se distribue entre les deux proportionnellement à leurs capa-



cités : soient Q la charge de A et C sa capacité ; le second prend une quantité q, et l'on a

$$\frac{Q-q}{q}=\frac{C}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{Q}{q}=\frac{C+x}{x}.$$

Nous en déduisons, en nous rappelant que les déviations produites par la décharge dans un galvanomètre sont proportionnelles aux charges,

$$\frac{Q-q}{Q}=\frac{28}{35}=\frac{C}{C+x}$$

et

$$x=\frac{C(35-28)}{28}=\frac{1}{10}\times\frac{7}{28}=\frac{1}{40} \text{ de microfarad.}$$

60. *Un condensateur de 1 microfarad est mis dix fois de suite en communication avec un câble, élevé primitivement au potentiel* E, *et il est déchargé autant de fois : on note la dernière fois une déviation de 42 divisions dans un galvanomètre traversé par le courant de décharge. Ce même condensateur, chargé directement au même potentiel* E, *donnerait d'ailleurs une déviation de 75 divisions dans ce galvanomètre. Déduire de ces expériences la capacité x du câble.*

A chaque contact, le condensateur emporte une partie de la charge du câble; mais la quantité soustraite décroît à chaque opération; toutefois, le partage se fait toujours proportionnellement aux capacités. Soient Q_1 la charge primitive du câble, C et x les capacités du condensateur et du câble; le condensateur prend la première fois $Q_1\frac{C}{C+x}$, et le câble garde $Q_1\frac{x}{C+x}$; à la seconde opération, le condensateur emporte

$$\left(Q_1\frac{x}{C+x}\right)\frac{C}{C+x}=Q_1\frac{Cx}{(C+x)^2}.$$

Or, le condensateur, élevé au même potentiel que le câble,

posséderait une quantité Q_2 égale à $Q_1 \frac{C}{x}$; donc $Q_1 = Q_2 \frac{x}{C}$, et la quantité emportée peut être représentée par

$$Q_2 \left(\frac{x}{C+x}\right)^2.$$

A la $n^{\text{ième}}$ opération, le condensateur a pris

$$Q = Q_2 \left(\frac{x}{C+x}\right)^n.$$

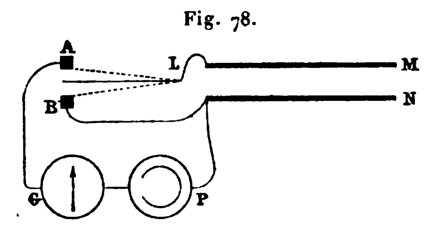
Mais Q est connu par la déviation de décharge; par conséquent, nous pouvons résoudre cette équation pour en tirer x

$$x = C \frac{\sqrt[n]{Q}}{\sqrt[n]{Q_2} - \sqrt[n]{Q}} = \frac{C}{\left(\frac{Q_2}{Q}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{75}{42}\right)^{\frac{1}{10}} - 1} = \frac{1}{1{,}059 - 1} = 16{,}95 \text{ microfarads.}$$

61. *Une lame d'acier* L (*fig.* 78) *vibre entre deux contacts* A *et* B; *cette lame est reliée à une des armatures* M *d'un con-*

Fig. 78.



densateur MN; *les contacts communiquent avec l'armature* N *l'un* B *directement et l'autre* A *par l'intermédiaire d'un circuit qui comprend un galvanomètre* G *et une pile de charge* P. *Le condensateur se charge par* A *et se décharge par* B *dans le mouvement oscillatoire de la lame : or, pour un nombre* $n = 164$ *vibrations doubles par seconde, le galvanomètre*

marque une déviation permanente $\alpha = 32°$; on a constaté d'autre part que le courant continu de la pile P *lui fait subir une déviation $\alpha' = 25°$ à travers une résistance* R *égale à* 100 *ohms. On demande de calculer d'après ces données la capacité du condensateur en farads?*

L'intensité I du courant de décharge est égale à nEC; elle est mesurée par la déviation α du galvanomètre balistique, attendu que la durée de l'oscillation de la lame est très faible par rapport à la durée de l'oscillation de l'aiguille; posons

$$I = K\alpha.$$

Par suite,

$$nEC = K\alpha;$$

mais on a aussi

$$E = I'R = K\alpha' R;$$

donc

$$C = \frac{\alpha}{\alpha'} \frac{1}{nR} = 8 \times 10^{-5} \text{ farads} = 80 \text{ microfarads.}$$

62. *Une pile alimente à la fois les deux circuits antagonistes d'un galvanomètre différentiel parfaitement réglé: un des courants est continu et il traverse une résistance* R; *l'autre est interrompu par un diapason, qui charge n fois par seconde un condensateur de capacité* C *et le décharge autant de fois à travers le galvanomètre. Quelle est la relation qui devra exister entre* R *et* C *pour que le galvanomètre soit réduit à zéro?*

Le courant continu débite par seconde une quantité d'électricité égale à $\frac{E}{R}$; le courant, périodiquement interrompu, donne nCE; nous avons donc

$$\frac{E}{R} = nCE,$$

d'où

$$\frac{1}{RC} = n.$$

La capacité d'un condensateur pourrait être déterminée

ainsi en fonction d'une résistance connue et du nombre n des interruptions, qu'on peut évaluer avec une très grande précision. Pour les applications, on exprimera R en mégohms et C en microfarads ou, plus simplement, en unités absolues C.G.S.

63. *Un condensateur de* 100 *microfarads de capacité est déchargé dans un fil de résistance* $R = 50$ *ohms; quel est le temps nécessaire pour que le potentiel baisse de moitié dans ce condensateur?*

$$-dQ = -C dV = I dt = \frac{V}{R} dt,$$

en admettant que l'écoulement soit uniforme dans l'intervalle de temps infiniment petit dt; il vient donc

$$\int_{t_0}^{t_1} dt = CR \int_{v_0}^{v_1} -\frac{dV}{V},$$

$$t = CR \log' \frac{V_0}{V_1} = CR \log' 2$$

$$= 100 \times 50 \times 10^{-6} \times \log' 2$$

$$= 3,5 \times 10^{-3} \text{ secondes.}$$

C'est environ $\frac{1}{285}$ de seconde.

64. *Un câble est à un potentiel* V ; *on constate qu'au bout d'un temps* t' *il est tombé à un potentiel* V', *par suite de ses déperditions : au bout de quel temps* t'' *le potentiel sera-t-il devenu* $\frac{V}{2}$?

Un câble chargé perd des fractions égales n de sa charge, dans des intervalles de temps égaux. Le potentiel, ayant donc subi une chute de $\frac{V}{n}$ au bout de la première seconde, a pris

une valeur $V_1 = V - \frac{V}{n}$; on en déduit n,

$$n = \frac{V}{V - V_1}.$$

A la fin de la deuxième seconde, le potentiel sera

$$V_2 = V_1 - \frac{V_1}{n} = V_1 - V_1\left(\frac{V - V_1}{V}\right) = \frac{V_1^2}{V} = V\left(\frac{V_1}{V}\right)^2.$$

Au bout des temps t' et t'', il sera

$$V' = V\left(\frac{V_1}{V}\right)^{t'},$$

$$V'' = V\left(\frac{V_1}{V}\right)^{t''}$$

et

$$t' = \frac{\log\frac{V'}{V}}{\log\frac{V_1}{V}}, \qquad t'' = \frac{\log\frac{V''}{V}}{\log\frac{V_1}{V}};$$

d'où

$$t'' = t'\,\frac{\log\frac{V''}{V}}{\log\frac{V'}{V}} = t'\,\frac{\log 2}{\log\frac{V'}{V}}.$$

65. *Calculer la résistance intérieure d'un électrolyte, dans lequel une des électrodes est constituée par un fil de* $0^{cm},5$ *de diamètre alors que la seconde électrode est un cylindre concentrique, mesurant* 8^{cm} *de diamètre; le liquide à électrolyser est du sulfate de cuivre* ($CuO, SO^3 + 45\,HO$) *et il forme un cylindre annulaire de* 10^{cm} *de hauteur.*

Il s'agit de calculer la résistance x d'un milieu compris entre deux cylindres concentriques de rayons R_1 et R; or soit C la capacité électrostatique d'un conducteur de cette

forme, de conductibilité spécifique c; nous aurons

$$(7\ ter) \qquad x\mathrm{C} = \frac{1}{4\pi c}.$$

Mais

$$\mathrm{C} = \frac{1}{2\log' \frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}}} \text{ (13, Ch. I, Liv. III).}$$

Donc

$$x = \frac{\log' \frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}}}{2\pi c}$$

par unité de longueur, et, pour une longueur h,

$$x = \frac{h \log' \frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}}}{2\pi c}.$$

Les Tables nous donnent pour $\frac{1}{c}$ une valeur de

$$19,10 \times 10^9 \text{ C.G.S.} = 19^{\text{ohms}},1$$

par centimètre.

$$x = 84^{\text{ohms}},28.$$

66. *Une pile de 50 éléments Daniell, montés en série, alimente un circuit formé de 40^m de câble, ayant une résistance de 0,002 ohm par mètre courant et de 30^cm de fil de fer de 0^cm,05 de diamètre; combien de calories seront dégagées en une minute dans ce fil?*

L'intensité I du courant est égale à $\frac{50 \times 1,07}{50 \times 1,5 + 0,08 + r}$, en appelant r la résistance à calculer du fil de fer.

Mais

$$r = \frac{30 \times 9,636 \times 10^3}{0,001963} = 0,147 \times 10^9 \text{ C.G.S.} = 0,147 \text{ ohm}.$$

Donc

$$I = \frac{50 \times 1,07}{50 \times 1,5 + 0,08 + 0,147} = 0,711 \text{ ampère.}$$

L'énergie disponible dans le fil est égale à $\frac{EI}{9,81} = \frac{RI^2}{9,81}$ en kilogrammètres et le nombre de calories correspondantes est, par seconde,

$$(8) \qquad \frac{RI^2}{9,81 \times 425} = \frac{RI^2}{4169,25} = \frac{0,147 \times \overline{0,711}^2}{4169,25}$$

et, en une minute,

$$\frac{0,147 \times \overline{0,711}^2 \times 60}{4169,25} = 0,0015 \text{ calorie} = 1,5 \text{ calorie-gramme.}$$

On serait arrivé au même résultat en calculant la différence de potentiel e entre les deux extrémités du fil de fer : l'énergie disponible est égale à $\frac{e^2}{r}$ (8 *bis*).

67. *Un courant constant traverse un fil de platine résistant, dont on fait progressivement augmenter la longueur ; quelle est l'influence de cet allongement sur la température du fil, si le courant est maintenu constant?*

On voit sans peine que

$$Q = AW = AI^2Rt = lsDC\theta;$$

dans cette équation, R est la résistance du fil, l sa longueur, s sa section, D sa densité, C sa chaleur spécifique, t la durée de l'expérience en secondes et θ la température produite par le passage du courant d'intensité I ; on peut encore écrire

$$AI^2Rt = AI^2 \frac{l}{cs} t = lsDC\theta,$$

en désignant par c la conductibilité spécifique du platine; il vient, toutes réductions faites,

$$\theta = \mathrm{AI}^2 \frac{t}{s^2 \mathrm{D}} \frac{1}{\mathrm{C}c}.$$

L'influence de la longueur est donc nulle, lorsque l'intensité du courant reste constante et lorsque l'on peut négliger le refroidissement par la conductibilité des attaches et le rayonnement extérieur.

68. *Un courant de 1,5 ampère est lancé dans un fil de platine de galvanocautère, de $0^{cm},1$ de diamètre, pendant une seconde; quel est l'accroissement de température subi par ce fil, s'il n'éprouve aucune déperdition ni par sa surface, ni par ses extrémités?*

$$\theta = \mathrm{AI}^2 \frac{t}{s^2 \mathrm{D}} \frac{1}{\mathrm{C}c}.$$

Rappelons-nous, pour rendre cette équation homogène, que, si l'on prend le centimètre pour unité de longueur, le poids du fil est exprimé en grammes, et le calorique gagné est mesuré par des calories-gramme; pour passer aux calories, le résultat est donc à multiplier par 1000. L'énergie sera énoncée en kilogrammètres et l'on divisera par 9,81 le produit des ampères par la résistance exprimée en ohms.

$$\theta = \frac{1000}{425} \frac{\overline{1,5}^2}{9,81} \frac{1}{\overline{0,0079}^2 \times 21,45} \frac{1}{0,0324 \times 11,14 \times 10^4} = 1093^\circ.$$

On n'éprouve de difficulté dans les applications de ce genre que pour transformer les unités : il importe d'observer que c, qui est donné dans les Tables en fonction des unités C.G.S, a dû être multiplié par 10^9 pour être exprimé en ohms et l'on a écrit

$$11,14 \times 10^{-5} \times 10^9 = 11,14 \times 10^4.$$

Il est quelquefois plus avantageux de réduire les unités en mesures absolues. L'exercice suivant est traité de la sorte.



69. *Une amorce explosive en platine, de* $0^{cm},3$ *de long,* $0^{cm},005$ *de diamètre, a une résistance de* 0,14 *ohm et il faut qu'elle atteigne* 700° *pour provoquer une détonation; quel temps* x *sera nécessaire pour qu'un courant de* 0,5 *ampères produise la mise du feu?*

$$AI^2Rx = lsDC\theta.$$

En unités C.G.S., nous aurons

$$I = 0,05; \qquad R = 0,14 \times 10^9 = 14 \times 10^7;$$

exprimons lsD en grammes, donc $lsDC\theta$ en calories-gramme, et rapportons A aux ergs par calorie-gramme.

$$\overline{0,05}^2 \times 14 \times 10^7 x$$
$$= 4,16 \times 10^7 \times 0,0000196 \times 21,45 \times 0,3 \times 0,0324 \times 700,$$
$$x = 0^s,35.$$

70. *Un fil de fer de* $0^{cm},04$ *de diamètre est maintenu au rouge blanc, soit à* 1000°, *par un courant de* 18 *ampères; quel est le pouvoir émissif* H *du fer incandescent?*

La permanence du régime permet d'égaler la chaleur du courant à la perte de calorique dans l'air.

Pour un excès ε de température, nous aurons

$$Q = AI^2Rt = \pi d . lH\varepsilon t.$$

H est en réalité le coefficient de conductibilité extérieure, somme des effets de rayonnement, de conductibilité et de convection : on ne saurait séparer ces trois facteurs. Cette équation peut s'écrire

$$AI^2 \frac{l}{cs} = AI^2 \frac{l}{c\dfrac{\pi d^2}{4}} = \pi dl H\varepsilon$$

ou

$$H = \frac{4AI^2}{c\pi^2 d^3 \varepsilon}.$$

L'influence de la longueur est donc nulle, quand l'intensité du courant est donnée [1]; exprimons les grandeurs en unités C.G.S, nous aurons

$$H = \frac{4 \times \overline{1,8}^2}{4,16 \times 10^7 \times 10,38 \times 10^{-5} . \pi^2 . \overline{0,04}^3 \times 1000}$$
$$= \frac{12,96}{4,16 \times 10,38 . \pi^2 . 64 \times 10^{-1}} = 0,0048.$$

Ce coefficient absolu est rapporté au centimètre carré et il est exprimé en calories-gramme; on aurait $0^{cal},048$ par mètre carré.

71. *Un coupe-circuit de sûreté, en métal fusible, doit interrompre le courant dès qu'il atteint* 20 *ampères; quel diamètre lui donnera-t-on?*

Soient T la température de fusion et γ la chaleur latente de fusion du métal; on écrira que la chaleur du courant est égale à la chaleur perdue par émission vers l'extérieur, augmentée du calorique de fusion. Supposons que le fil soit plongé dans un milieu à zéro et que la température soit T. On pose, en adoptant les notations des exercices précédents,

$$AI^2R = \pi d l HT + \frac{\pi d^2}{4} l D \gamma$$

ou

$$AI^2 \frac{l}{c \frac{\pi d^2}{4}} = \pi d l HT + \frac{\pi d^2}{4} l D \gamma,$$

équation de laquelle on tire la valeur du diamètre d; pour éviter les termes du quatrième degré, on néglige généralement le dernier terme du second membre et l'on détermine d par une équation de la forme

$$I = K d^{\frac{3}{2}}.$$

(1) Cette condition est évidemment imposée : ce résultat est conforme à la solution de l'exercice 66.

Mais il faut reconnaître que le refroidissement par les attaches exerce une grande influence, de telle sorte qu'en réalité les électriciens préfèrent se laisser guider par l'expérience que par un calcul incomplet (¹).

72. *Un fil de platine, traversé par un courant, est engagé dans le réservoir d'un thermomètre à mercure, qui marque des excès de température* ε_0, ε_1 *et* ε_2 *aux temps* t_0, t_1 *et* t_2; *déduire de cette observation la quantité de chaleur* Q *dégagée par seconde dans le fil, sachant que* $t_1 - t_0 = t_2 - t_1$.

Si l'on désigne par H le coefficient de conductibilité extérieure du thermomètre, qu'il est facile de mesurer, on peut écrire que la perte de chaleur subie dans un intervalle de temps dt est $\mathrm{H}\varepsilon\,dt$, pour un excès ε.

Soit M le poids en eau de l'appareil;

$$(\mathrm{Q} - \mathrm{H}\varepsilon)\,dt = \mathrm{M}\,d\varepsilon,$$

$$dt = \frac{\mathrm{M}\,d\varepsilon}{\mathrm{Q} - \mathrm{H}\varepsilon},$$

$$t_1 - t_0 = -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{H}}\log' \frac{\mathrm{Q} - \mathrm{H}\varepsilon_1}{\mathrm{Q} - \mathrm{H}\varepsilon_0},$$

$$t_2 - t_0 = 2(t_1 - t_0) = -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{H}}\log' \frac{\mathrm{Q} - \mathrm{H}\varepsilon_2}{\mathrm{Q} - \mathrm{H}\varepsilon_0};$$

d'où

$$\frac{\mathrm{Q} - \mathrm{H}\varepsilon_2}{\mathrm{Q} - \mathrm{H}\varepsilon_0} = \left(\frac{\mathrm{Q} - \mathrm{H}\varepsilon_1}{\mathrm{Q} - \mathrm{H}\varepsilon_0}\right)^2$$

et

$$(\mathrm{Q} - \mathrm{H}\varepsilon_2)(\mathrm{Q} - \mathrm{H}\varepsilon_0) = (\mathrm{Q} - \mathrm{H}\varepsilon_1)^2.$$

Il vient enfin

$$\mathrm{Q} = \mathrm{H}\,\frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_1 - (\varepsilon_0 + \varepsilon_2)}.$$

C'est par un procédé analogue que Poggendorff a vérifié l'exactitude de la loi de Joule.

(¹) Les coupe-circuits sont des fils de plomb de 3^{cm} de longueur, dont la section se calcule à raison de $0^{mmq},127$ par ampère.

73. *Deux bobines, formées l'une d'un fil de maillechort, l'autre d'un fil de cuivre, de même longueur, sont traversées par le même courant; quel doit être le rapport des diamètres de ces fils, pour que l'augmentation de résistance due à leur échauffement par le courant soit la même.*

Nous connaissons déjà la valeur de l'échauffement θ produit dans un temps t_1 par un courant d'intensité I :

$$\theta = \mathrm{AI}^2 \frac{t}{\mathrm{S}^2\mathrm{D}} \frac{1}{\mathrm{C}c}. \qquad \text{(Exercice 66.)}$$

L'échauffement θ du fil de maillechort est donc à celui qui est produit dans le fil de cuivre θ', par le même courant I et dans le même temps t, dans le rapport de

$$\frac{\theta}{\theta'} = \frac{\mathrm{S}'^2\mathrm{D}'\mathrm{C}'c'}{\mathrm{S}^2\mathrm{D}\mathrm{C}c} = \frac{d'^4\mathrm{D}'\mathrm{C}'c'}{d^4\mathrm{D}\mathrm{C}c}.$$

Les accroissements de résistance sont connus par les Tables : ils doivent être égaux. Appelant α l'accroissement par degré, nous aurons

$$\frac{\theta\alpha}{\theta'\alpha'} = 1$$

ou

$$\mathrm{AI}^2 \frac{t\alpha}{\mathrm{S}^2\mathrm{D}} \frac{1}{\mathrm{C}c} = \frac{\mathrm{AI}^2 t\alpha'}{\mathrm{S}'^2\mathrm{D}'\mathrm{C}'c'}$$

ou enfin

$$\frac{\alpha}{d^4\mathrm{D}} \frac{1}{\mathrm{C}c} = \frac{\alpha'}{d'^4\mathrm{D}'} \frac{1}{\mathrm{C}'c'};$$

d'où

$$\frac{d^4}{d'^4} = \frac{\alpha}{\alpha'} \frac{\mathrm{D}'\mathrm{C}'c'}{\mathrm{D}\mathrm{C}c} = \frac{44}{388} \frac{8,9 \times 0,0951 \times 63,13}{8,6 \times 0,0939 \times 4,82} = 1,58,$$

$$\frac{d}{d'} = 1,12.$$

Le diamètre du fil de maillechort sera par suite 1,12 fois plus grand que celui du fil de cuivre; le rapport des sections $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}'}$ sera 1,26.

74. *Quelle condition doit remplir un shunt de galvanomètre pour que le rapport des résistances du shunt et du galvanomètre ne soit pas troublé par l'échauffement produit par le courant; on supposera que les deux circuits sont en fil de cuivre et que le pouvoir multiplicateur du shunt est égal au* $\frac{1}{100}$.

La même formule nous conduira à la solution de ce problème, dont l'importance pratique n'échappera pas au lecteur : faisons α, D, C et c égaux à α', D', C' et c',

$$\frac{I^2}{S^2} = \frac{I'^2}{S'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{I}{S} = \frac{I'}{S'}$$

Il faut donc que la densité du courant soit la même dans les deux branches, c'est-à-dire que l'intensité par unité de section soit la même ([1]).

Or, dans le cas proposé, l'intensité I du courant dans le shunt est 99 fois celle du courant I' dans le galvanomètre.

Par conséquent,

$$\frac{I}{I'} = 99 = \frac{S}{S'}.$$

Les sections devraient donc être dans le même rapport, ce qui est le plus souvent impraticable; c'est pourquoi l'on fait fréquemment les dérivations de shuntage en maillechort.

75. *On veut produire* Q *calories par seconde dans l'anse coupante d'un galvanocautère, de résistance* R, *à l'aide d'éléments Poggendorff, qu'on montera de la manière la plus convenable; dire combien il faudra assembler d'éléments et de quelle manière?*

([1]) Si les fils n'étaient pas de même nature, on trouverait

$$\frac{\frac{I}{S}}{\frac{I'}{S'}} = \sqrt{\frac{\alpha' D}{\alpha D'} \frac{Cc}{C'c'}}.$$

Formons y séries de x éléments : leur résistance totale sera $y\frac{r}{x}$, et il faudra que $y\frac{r}{x} = \text{R}$, c'est-à-dire que $\frac{y}{x} = \frac{\text{R}}{r}$. En d'autres termes, la résistance totale sera 2R et l'intensité du courant sera $\text{I} = \frac{x\text{E}}{2\text{R}}$. Il se dégagera le même nombre de calories dans la pile et dans le conducteur, soit en tout une quantité 2Q.

Or la quantité de chaleur dégagée par ce courant d'intensité I, dans la résistance extérieure R, est

$$\text{Q} = \text{AI}^2\text{R} = \text{A}\,\frac{x^2\text{E}^2}{4\text{R}}.$$

Donc

$$x = \sqrt{\frac{4\text{RJQ}}{\text{E}^2}}.$$

Nous savons donc aussi que

$$y = \frac{\text{R}}{r}\sqrt{\frac{4\text{RJQ}}{\text{E}^2}}.$$

On emploiera xy éléments.

76. *Deux masses électriques égales et de même signe produisent un champ, dans lequel les surfaces de niveau sont de révolution; l'une d'elles a sa courbe méridienne formée de deux lobes qui se coupent en un point situé à égale distance des deux masses; sa capacité électrostatique* C *est facilement calculable. Supposons un conducteur plein de même forme et de mêmes dimensions, dont la matière a une résistance spécifique* $\frac{1}{c}$; *admettons que les points occupés par les masses électriques soient en communication avec une source au potentiel* V *et que la surface extérieure soit maintenue au potentiel* V_0. *On demande :*

1° *Quelle sera la résistance* R *de ce conducteur?*

2° *Quelle quantité* Q *d'électricité traversera le conducteur en une seconde?*

3° *Quelle sera la quantité de chaleur w dégagée par seconde dans le conducteur?* ([1]).

Kirchhoff a démontré qu'un conducteur de forme et de nature quelconques peut être remplacé par un système de fils conducteurs; c'est la résistance équivalente de ces fils que nous appellerons, par définition, la *résistance du conducteur*. Or nous savons que

$$(7\ ter) \qquad RC = \frac{1}{4\pi c};$$

nous en déduisons

$$R = \frac{1}{4\pi C c}.$$

D'autre part, si nous appelons I le flux total d'électricité ou l'intensité totale du courant, nous aurons, pour une seconde,

$$Q = I = \frac{V - V_0}{R}.$$

Enfin, en remarquant qu'une quantité Q tombe du niveau V au niveau V_0, nous pourrons écrire

$$w = AW = AQ(V - V_0).$$

77. *Combien faut-il dépenser d'énergie pour faire circuler un courant de* 100 *ampères dans un conducteur en cuivre de* 1000^m *de longueur et de* $0^{cm},5$ *de diamètre?*

L'électricité est un transmetteur d'énergie dont les services ne sont pas gratuits, ainsi que nous pourrons en juger par l'exemple proposé.

La résistance de 1^{km} de fil de cuivre de $0^{cm},5$ de diamètre

(1) Ce problème a été proposé aux candidats à la licence, en novembre 1888, par la Faculté des Sciences de Paris : nous avons généralisé la forme de l'énoncé.

est, d'après nos Tables, égale à 0,8 ohm; l'énergie absorbée est donc

$$W = \frac{\overline{100}^2 \times 0,8}{9,81} = 815^{kgm}.$$

78. ***Mesurer au calorimètre l'intensité moyenne d'un courant d'intensité variable.***

$$I^2 = \frac{JQ}{Rt} = \frac{JM(T' - T + K)}{Rt}.$$

Cette équation, dans laquelle M est le poids en eau du calorimètre, du fil et de tous les accessoires de l'expérience, et dans laquelle T′ et T sont les températures finale et initiale, permet de calculer l'intensité d'un courant d'après la quantité de chaleur abandonnée dans le calorimètre : le terme K est la correction des pertes par rayonnement, conductibilité et convection.

Mais un essai prolongé, et il faut qu'il le soit, entraîne des variations notables de la température qui obligent de tenir compte des variations de la résistance du conducteur.

Or

$$R = R_0(1 \times \alpha T).$$

Donc

$$I^2 = \frac{JM(T' - T + K)}{R_0(1 + \alpha T)dt}$$

ou, plus simplement,

$$I^2 = \frac{JM dT}{R_0(1 + \alpha T)} \frac{1}{dt},$$

ou

$$\frac{I^2 R_0}{JM} dt = \frac{dT}{1 + \alpha T}.$$

Intégrons entre les limites T_0 et T_1 :

$$\frac{R_0}{JM} \int_0^t I^2 dt = \log' \frac{1 + \alpha T_1}{1 + \alpha T_0};$$

d'où

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{I}^2 dt = \frac{\mathrm{JM}}{\mathrm{R}_0 t}\log'\frac{1+\alpha \mathrm{T}_1}{1+\alpha \mathrm{T}_0}.$$

Ce calcul donne le carré de l'intensité moyenne du courant variable; cette méthode est applicable aux courants alternatifs et, à cet égard, elle est plus recommandable que les procédés électrolytiques.

79. *Quelle est l'énergie d'un condensateur de* 10 *microfarads chargé au potentiel de* 50 *volts?*

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}CV^2 \\ &= \frac{10}{2}(10^{-9}\times 10^{-6})(10^8\times 50)^2 \\ &= 125\times 10^3 \text{ ergs} \\ &= \frac{125}{9{,}81}\times 10^{-4} = 12{,}7\times 10^{-4} \text{ kilogrammètres,} \end{aligned}$$

car le kilogrammètre vaut $9{,}81\times 10^7$ ergs.

80. *Quelle est la quantité de chaleur dégagée dans un fil, par la décharge d'un condensateur chargé de* 1000 *unités électrostatiques* C.G.S., *la différence de potentiel étant de* 1 *unité électrostatique? On exprimera cette charge et cette différence de potentiel dans le système électromagnétique* C.G.S. [1].

$$W = \frac{1}{2}MV \text{ ergs} = \frac{1}{2}\frac{MV}{9{,}81\times 10^7} \text{ kilogrammètres,}$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}\frac{AMV}{9{,}81\times 10^7} = \frac{1}{2}\frac{1000\times 1}{425\times 9{,}81\times 10^7} \\ &= 1{,}19\times 10^{-8} \text{ calories.} \end{aligned}$$

---

[1] Question posée aux examens de licence, par la Faculté des Sciences de Paris, à la session de novembre 1886.

On aurait pu écrire directement

$$Q = AW = \frac{1}{2} AMV = \frac{1}{2} \frac{1000 \times 1}{4,17 \times 10^{10}} = 1,19 \times 10^{-8} \text{ calories.}$$

Il nous reste à exprimer, en unités électromagnétiques, la charge et le potentiel électrostatique. Mais nous avons démontré (p. 279) que

$$\frac{Q}{q} = \frac{e}{E} = v = 3 \times 10^{10},$$

les majuscules se rapportant aux unités électromagnétiques. L'unité Q de quantité électromagnétique étant 3×10^{10} fois plus grande que l'unité électrostatique, nous diviserons les 1000 unités par 3×10^{10}; par conséquent, 1000 unités électrostatiques de quantité $= \frac{1}{3 \times 10^{7}}$ unités électromagnétiques de quantité.

Enfin, par les mêmes considérations, 1 unité électrostatique de potentiel $= 3 \times 10^{10}$ unités électromagnétiques de potentiel.

81. *On veut transporter à* 100^{km} *de distance une force de* 100 *chevaux avec une perte d'au plus* 20 *pour* 100; *calculer la résistance du conducteur d'après ces données, en négligeant la résistance de la source, dont la force électromotrice sera supposée de* 500 *volts.*

$$\mathcal{E} = \frac{EI}{9,81},$$

$$I = \frac{9,81 \times \mathcal{E}}{E} = \frac{9,81 \times 7500}{500} = 147,15 \text{ ampères.}$$

La perte étant limitée à 20 pour 100 ne pourra dépasser 20 chevaux, soient 1500^{kg} par seconde; il faut donc que

$$W = 1500 = \frac{I^2 R}{9,81},$$

d'où

$$R = \frac{1500 \times 9,81}{\overline{147,15}^2} = 0,68 \text{ ohm}.$$

La résistance kilométrique sera, par suite, égale à

6800 microhms.

Le conducteur aurait 28^{cq} de section. En doublant les volts, on réduirait l'intensité du courant à 73,57 ampères et la résistance pourrait atteindre 2,72 ohms. L'avantage des hauts potentiels est évident.

82. *Quelle est la force électromotrice d'un couple thermo-électrique cuivre-fer, les soudures étant maintenues à* 0° *et* 150°.

Les Tables de Matthiesen-Everett nous donnent :

Cu....................	$-\ 136 - 0,95\,t$
Fe....................	$-1734 + 4,87\,t$
Cu-Fe..................	$+1598 - 5,82\,t$

La force électromotrice par degré est par conséquent

$$1598 - 5,82 \times 75 = 1161,5 \text{ unités C.G.S.}$$
$$= 11,615 \text{ microvolts.}$$

Le courant va du fer au cuivre, à travers la soudure la plus chaude.

Le point neutre est facile à déterminer :

$$1598 - 5,82\,t = 0.$$
$$t = 274.$$

83. *Calculer la valeur absolue de l'effet Peltier dans un couple fer-zinc, pour une température de* 15°.

(10) $$\Pi = \frac{T}{J}\frac{dE}{dT}.$$

Cette formule suppose toutes les grandeurs évaluées en unités absolues.

$$T = 288°.$$

La Table d'Everett donnée ci-dessus nous fait connaître la force électromotrice par degré de différence, quand la température moyenne est t :

Fe............	$-1734 + 4,87\,t$
Zn............	$-\ 234 - 2,40\,t$
Fe-Zn.........	$-1500 + 7,27\,t = -1391$

C'est la valeur de $\frac{dE}{dT}$ en unités C.G.S.

Par suite,

$$\Pi = -\frac{288}{4,17 \times 10^7}\,1391 = 0^{\text{cal}},0095.$$

Ce chiffre serait un peu trop fort, à en croire les expériences de M. Bellati, lequel avait trouvé une valeur de $\frac{dE}{dT}$ plus faible que celle que nous avons calculée d'après la Table.

84. *Une soudure bismuth et cuivre, que traverse un courant de* 220 *milli-ampères, est entourée d'eau à zéro; au bout de vingt minutes, on constate qu'il s'est formé un glaçon de* 15^{cgr} *autour de la soudure. On demande de calculer la chute de potentiel e en volts au contact du bismuth et du cuivre à zéro dans les conditions de cette expérience.*

En vertu de l'effet Peltier, il se produit à la soudure une absorption de calorique équivalente à la dépense d'énergie nécessaire pour élever une quantité d'électricité It au niveau e; nous avons donc

$$Jw = eIt,$$

d'où

$$e = \frac{Jw}{It}.$$

Or,

$$w = 0,15 \times 80 \text{ calories-grammes},$$
$$t = 1200 \text{ secondes}.$$

Pour trouver e en volts, il faudra multiplier la force électromotrice par 10^8 et l'intensité, exprimée en ampères, par 10^{-1}, ce qui donne

$$e = \frac{4,17 \times 10^7 \times 0,15 \times 80}{10^8 \times 0,22 \times 10^{-1} \times 1200} = 0^{\text{volt}},19.$$

CHAPITRE IV.

ÉLECTROMAGNÉTISME ET ÉLECTRODYNAMIQUE.

Un courant électrique crée autour de lui un véritable champ magnétique, jouissant des propriétés d'un champ magnétique ordinaire; si le courant est rectiligne, les surfaces de niveau successives sont des plans menés par l'axe du fil et faisant entre eux des angles égaux; les lignes de force sont des circonférences dont l'axe du courant est le centre commun; enfin la force est normale en chaque point au plan passant par ce point et par le courant, et elle est dirigée vers la gauche de l'observateur d'Ampère. En se plaçant à l'extrémité par laquelle entre le courant, c'est-à-dire à l'extrémité positive, la direction des lignes de force est celle du mouvement des aiguilles d'une montre [1]. Ces faits ressortent de l'expérience d'Œrsted.

Le champ magnétique d'un courant est défini par un potentiel, c'est-à-dire par une fonction dont les dérivées partielles, par rapport aux axes des coordonnées, représentent les composantes respectives de la force prises en sens contraire. Mais le potentiel du courant en un point n'est pas une simple fonction des coordonnées; en effet, pour un courant rectiligne indéfini, cette fonction a une infinité de valeurs différant les unes des autres d'un multiple de $4\pi\tau$, τ étant le travail correspondant à la rotation complète autour de l'axe du courant d'un pôle égal à l'unité.

[1] Maxwell a formulé une autre règle mnémonique : si l'on imagine que l'axe d'un tire-bouchon coïncide avec le fil, le sens de la rotation qu'il faut imprimer à l'instrument pour obtenir un déplacement longitudinal dans le sens du courant est celui de la rotation d'un pôle magnétique austral, suivant les lignes de force.

Le potentiel d'un courant fermé quelconque en un point A est donné, à une constante près, par l'angle solide ω sous lequel on voit le contour de ce courant du point A, multiplié par l'intensité électromagnétique I du courant :

$$(1) \qquad V = I\omega + C.$$

Ce potentiel représente, comme pour un feuillet magnétique, le travail nécessaire pour amener une masse magnétique égale à $+1$ de l'infini au point A; si la masse avait traversé le circuit, on ajouterait à $I\omega$ autant de fois $4\pi I$ que la masse aurait passé de fois de la face positive à la face négative. La face positive est celle devant laquelle il faut se placer pour que le sens du courant paraisse inverse de celui des aiguilles d'une montre.

Pour un feuillet magnétique, terminé au même contour, dont la puissance Φ serait égale à I, on aurait même potentiel, à la constante près, d'après le théorème de Gauss; cette proposition nous conduit au théorème d'Ampère : « *L'action magnétique d'un courant fermé est égale à celle d'un feuillet magnétique de même contour, dont la puissance est égale à l'intensité du courant.* » L'expérience montre d'ailleurs que l'action réciproque de deux courants fermés est identique à celle des deux feuillets magnétiques équivalents à chacun d'eux.

Le théorème d'Ampère permet d'assimiler un solénoïde à un système magnétique obtenu par la superposition d'un certain nombre de feuillets magnétiques de même grandeur, d'épaisseur égale à la distance e des spires du solénoïde et de densité superficielle $\sigma = \frac{I}{e}$, I étant l'intensité du courant. Les surfaces en contact de tous ces feuillets s'annulent réciproquement, sauf les deux extrêmes, et l'action intérieure se réduit à celle de deux masses $\pm m$ placées aux extrémités. Si le solénoïde a une longueur l et s'il est formé de n spires, on aura donc

$$(2) \qquad \pm m = S\sigma = \frac{IS}{e} = \frac{nIS}{l} = n_1 IS,$$

n_1 étant le nombre de spires par unité de longueur.

Le moment magnétique du solénoïde est dès lors connu :

(3) $$M = ml = nIS = n_1 IS\, l.$$

Un solénoïde se comporte donc comme un aimant de moment $M = nIS$, dont le milieu et la direction d'axe coïncideraient avec le milieu et la direction d'axe du solénoïde.

MM. Mascart et Joubert ont donné, ainsi que nous l'avons déjà rappelé, le nom de *flux de force* au produit $F_n S$ de la force F_n, composante du champ normale à la surface, par l'étendue S de cette surface. Le flux de force à travers une surface plane est proportionnel à l'intensité du champ, à l'étendue de la surface et au cosinus de l'angle que font les lignes de force avec la normale à la surface : nous le représenterons par la lettre Q. Le flux de force est positif quand il pénètre dans le feuillet par la surface boréale ou négative.

Le flux qui traverse la surface S est égal à

$$4\pi S\sigma = 4\pi n_1 IS.$$

De même que pour les feuillets magnétiques, l'énergie d'un courant fermé dans un champ est égale au produit changé de signe de l'intensité du courant par le flux de force qui pénètre par la face négative du contour :

(4) $$W = -IQ.$$

Au lieu de la marche synthétique que nous venons de suivre dans l'exposé qui précède, on eût pu procéder par voie d'analyse.

Les expériences de Biot et Savart ont établi que l'action magnétique d'un courant sur un pôle est en raison inverse de la distance du courant au pôle. Laplace en a déduit la loi élémentaire qui porte son nom : la force df, exercée par un élément de longueur ds sur un pôle m placé à une distance r, quand cet élément est traversé par un courant d'intensité I, α étant l'angle de l'élément avec la droite qui joint le pôle à son centre, est donnée par l'équation

(5) $$df = \frac{mI\, ds \sin\alpha}{r^2}.$$

En remarquant que $\frac{m}{r^2}$ est l'action magnétique F de la masse m au point occupé par l'élément de courant, on trouve encore

$$(5\ bis) \qquad df = \mathrm{FI}\, ds \sin\alpha = \mathrm{I}\, d\Sigma,$$

Σ étant la surface du parallélogramme construit sur l'élément et la force F.

Dans un champ magnétique, F est l'intensité du champ et l'on peut dire que *l'action exercée sur un élément de courant est égale au produit de l'intensité du courant par l'aire du parallélogramme construit sur l'élément et sur l'intensité du champ* ([1]).

En partant de quelques principes établis sur l'observation des faits, Ampère a déterminé de même l'action de deux éléments de courant.

Deux éléments de courant ds et ds', traversés par des courants d'intensité I et I' (en unités électromagnétiques), s'attirent ou se repoussent, suivant la ligne qui joint leurs centres avec une force df égale à

$$(6) \qquad df = \frac{\mathrm{II}'\, ds\, ds'}{r^2}(2\cos\omega - 3\cos\theta\cos\theta'),$$

r étant la distance des centres des éléments, ω l'angle que forment entre eux ces deux éléments, θ et θ' les angles qu'ils forment l'un avec la droite qui joint leurs milieux et l'autre avec son prolongement (*fig* 79) ([2]); f est exprimé en dynes.

([1]) L'intensité I du courant est exprimée ici en unités électromagnétiques dont l'ampère est le $\frac{1}{10}$: sauf indication contraire, toutes les grandeurs seront toujours rapportées à ce système.

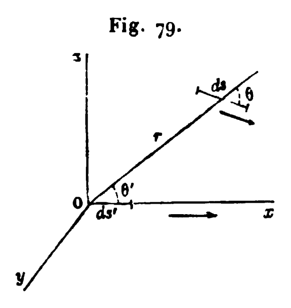
([2]) L'équation classique est

$$df = \frac{ii'\, ds\, ds'}{r^2}\left(\cos\omega - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right);$$

mais, dans cette formule, les intensités i et i' se rapportent aux unités électrodynamiques; or on sait que $\frac{i^2}{\mathrm{I}^2} = 2$.

En appliquant cette formule aux cas particuliers que l'on rencontre dans la pratique, on calcule sans peine l'action réciproque de deux courants de forme géométrique et de posi-

Fig. 79.



tion donnée : ainsi l'action d'un courant rectiligne indéfini sur un courant de longueur l, placé parallèlement au premier, à une distance d, se trouve par la formule

$$(7) \qquad f = \frac{2 \mathrm{II}' l}{d}.$$

Si les courants sont croisés, le courant mobile sera sollicité par une force perpendiculaire à sa direction égale à

$$(8) \qquad f = 2\mathrm{II}' \left(\frac{l}{d} - \frac{1}{2} \frac{l^2}{d^2} \sin\omega + \ldots \right),$$

ω étant l'angle des conducteurs : en remplaçant dans cette formule ω par $\frac{\pi}{2}$, on trouve l'action de deux courants perpendiculaires

$$(9) \qquad f = 2\mathrm{II}' \left(\frac{l}{d} - \frac{1}{2} \frac{l^2}{d^2} \right) = 2\mathrm{II}' \frac{l}{d} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{l}{d} \right).$$

Ces formules sont déduites de l'équation d'Ampère : elles conduisent, comme la méthode synthétique exposée ci-dessus, à déterminer les conditions d'équivalence d'un élément de courant et d'un feuillet de même contour

$$\mathrm{I} = \Phi.$$

L'identité qui existe entre l'action mutuelle des courants et celle des systèmes magnétiques corrélatifs a permis de former un seul chapitre de l'électromagnétisme et de l'électrodynamique, et elle a singulièrement facilité la solution des problèmes qui se présentent dans les applications.

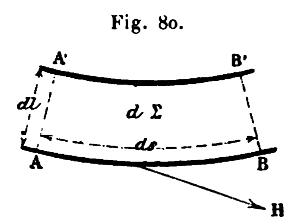
Il est très important de savoir évaluer le travail correspondant au déplacement d'un circuit fermé dans un champ magnétique.

Si un circuit fermé, traversé par un courant I, est placé dans un champ d'intensité H, un élément ds du courant sera sollicité par une force ∂f ayant pour valeur

$$\partial f = \mathrm{IH}\, ds \sin(\mathrm{H}\, ds),$$

et la résultante de cette force sera normale au plan (Hds) (*fig.* 80). Supposons que ds passe de la position AB à la po-

Fig. 80.



sition A'B' infiniment voisine, le chemin parcouru étant dl, et appelons $d\Sigma$ la surface du parallélogramme $ds.dl$; soit $d\sigma$ la projection de $d\Sigma$ sur un plan normal à H; l'analogie des courants et des feuillets nous permet d'écrire

$$d\mathfrak{T} = \mathrm{IH}\, d\sigma = \mathrm{I}\, d\mathrm{Q},$$

dQ étant la variation du flux de force qui traverse la surface du courant, et il vient

$$\mathfrak{T} = \mathrm{I}(\mathrm{Q}_2 - \mathrm{Q}_1). \tag{10}$$

Ainsi *le travail est égal au produit de l'intensité électromagnétique du courant par la différence des flux de force* $\mathrm{Q}_2 - \mathrm{Q}_1$.

Si l'on convient de dire positif le flux coupé par un élément se déplaçant vers la gauche d'un observateur qui regarde dans la direction du champ, on pourra modifier l'énoncé de ce théorème et l'on dira que *le travail est égal au produit de l'intensité du courant par le flux coupé par le contour du circuit* (1).

Un système abandonné à lui-même tend à épuiser toute l'énergie qu'il possède; ses positions d'équilibre sont celles où l'énergie passe par un minimum, et il s'oriente de manière que la valeur de Q tende vers un maximum. Ainsi, dans tous les déplacements relatifs des courants, des solénoïdes et des aimants, les déplacements produits spontanément sont tels que les flux de force se superposent en s'ajoutant, le flux de force résultant devenant ainsi maximum. Un conducteur circulaire mobile sera en équilibre stable lorsque le flux de force qui traversera sa face négative sera maximum, c'est-à-dire que, sous l'influence de la Terre, il se placera perpendiculairement à l'aiguille d'inclinaison, le courant marchant de l'est à l'ouest dans la partie inférieure.

De même, sous l'action de son propre flux, un circuit tendra à présenter la plus grande surface possible; un fil flexible affecte donc la forme circulaire. On explique par les mêmes considérations les attractions des courants parallèles.

En enroulant un fil en hélice autour d'un barreau de fer doux et en le faisant traverser par un courant, on obtient un aimant temporaire qu'on appelle un *électro-aimant* : le sens de l'aimantation est celui des lignes de force dans la bobine, et le pôle nord est à la gauche du courant.

Le calcul des propriétés des électro-aimants n'est point encore possible.

Toutefois on a démontré que la *force magnétomotrice* qui aimante est égale à $4\pi n I$, n étant le nombre de tours de l'hélice; d'autre part, l'intensité du champ dans le solénoïde

---

(1) Dans un champ uniforme, H représente le nombre de lignes de force de Faraday par unité de surface, et le travail, $\mathfrak{T} = \mathrm{H}\,d\sigma$, est mesuré par l'accroissement H $d\sigma$ du nombre de lignes de force embrassées dans le circuit pendant son déplacement. Cette considération est aussi très utile dans les applications.

est donnée par le produit $4\pi n_1 I$, lorsque n_1 représente le nombre de tours par unité de longueur.

L'aimantation du cylindre de fer est uniforme comme le champ intérieur de la bobine, et elle est égale à $K 4\pi n_1 I$, K étant le coefficient de susceptibilité du fer doux : le flux d'induction pour une section S est égal à $\mu 4\pi n_1 IS$, en appelant μ le coefficient de perméabilité.

La *force portante* d'un électro est, d'après M. Bidwell, exprimée par la relation

$$\varphi = (2\pi I_1^2 + HI_1)S, \tag{11}$$

dans laquelle I_1 est l'intensité d'aimantation en unités C.G.S., H l'intensité du champ dans la bobine, et S la section de l'aimant en centimètres carrés; φ est donné en grammes.

Les propriétés électromagnétiques et électrodynamiques des circuits donnent lieu à des observations rapides, desquelles on déduit les intensités des courants en unités absolues C.G.S.; les instruments construits sur ce principe sont les boussoles des sinus et des tangentes et les électrodynamomètres. Les boussoles des tangentes donnent l'intensité I par la formule

$$I = \frac{RH}{2n\pi} \operatorname{tang}\varphi,$$

dans laquelle R est le rayon moyen des spires, H l'intensité horizontale en unités C.G.S. et n le nombre de tours de fil. Pour une boussole des sinus, on écrirait

$$I = \frac{H}{G} \sin\varphi,$$

G étant l'intensité du champ du courant pour l'unité de courant, et φ l'angle dont il a fallu tourner le cadre. Enfin, pour l'électrodynamomètre de Weber, à suspension unifilaire, dont la bobine mobile a une surface S, on aura, quand la torsion est φ,

$$II'GS = C\varphi \qquad \text{ou} \qquad II' = K\varphi$$

ou, dans le cas d'égalité des deux courants,

$$I^2 = K\varphi, \tag{12}$$

K étant la constante galvanométrique de l'instrument. Si la suspension était bifilaire, on remplacerait φ par $\sin\varphi$.

Nous avons supposé jusqu'ici qu'on maintenait le cadre mobile dans sa position primitive par une torsion φ qui équilibrait le couple de l'action réciproque de la bobine mobile et de la bobine fixe.

Le plus souvent, on mesure la déviation φ que prend la bobine mobile, sans modifier la torsion : dans ce cas, le champ extérieur intervient dans la condition d'équilibre et l'on a alors, si la suspension est bifilaire,

$$II'GS\cos\varphi = (C + HI'S)\sin\varphi;$$

en intervertissant le sens du courant, on observe une seconde déviation φ', parce que l'action de la Terre a changé de signe, sans que l'action électrodynamique ait été modifiée : par élimination de $HI'S$ on obtient finalement une formule de la forme

$$II' = \frac{K}{2}(\tang\varphi + \tang\varphi')$$

ou

$$I^2 = \frac{K}{2}(\tang\varphi + \tang\varphi').$$

APPLICATIONS.

1. *Une bobine circulaire, formée de $n = 100$ spires, de 10^{cm} de rayon, longue de 20^{cm}, est traversée par un courant de 5 ampères : calculer l'intensité du champ magnétique à l'extrémité de son axe.*

Cette bobine équivaut à un aimant solénoïdal de même forme, et l'on peut remplacer chaque spire par un feuillet : l'action du système sur un point extérieur au cylindre se réduit à celle de deux couches égales et de signes contraires répandues uniformément sur les bases, dont la densité superficielle serait $\sigma = n_1 I$, n_1 étant le nombre de tours par unité de longueur : $n_1 = \frac{n}{l}$.

Mais

$$H = \sigma(\omega - \omega') \qquad \text{(théorème de Gauss)},$$

ω et ω' étant les angles solides sous lesquels on voit du point considéré les cercles extrêmes du solénoïde; dans le cas proposé,

$$\omega = 2\pi \qquad \text{et} \qquad \omega' = 2\pi\left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}}\right).$$

Nous trouvons donc

$$H = n_1 I 2\pi \frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}} = 5 \times 0,5 \times 2\pi \frac{20}{\sqrt{500}},$$

en tenant compte de ce que 5 ampères valent 0,5 unités d'intensité : tous calculs faits, nous trouvons

$$H = 14 \text{ unités C.G.S.}$$

2. *Quelle eût été l'intensité du champ au milieu de l'axe de la bobine du précédent exercice?*

Posons $H = \sigma(\omega - \omega')$ comme ci-dessus.

Or, soit ω_1 l'angle solide sur lequel on voit les bases du centre; l'angle ω' sera égal à $4\pi - \omega_1$; d'où

$$\begin{aligned}
H &= \sigma(4\pi - 2\omega_1)\\
&= \sigma\left[4\pi - 4\pi\left(1 - \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + R^2}}\right)\right]\\
&= \sigma 4\pi \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4R^2}}\\
&= 4\pi n_1 I \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4R^2}}\\
&= 4\pi \times 5 \times 0,5 \times \frac{20}{\sqrt{400 + 400}}\\
&= 22 \text{ unités C.G.S.}
\end{aligned}$$

Si la bobine avait une longueur infinie ou du moins très grande, on aurait eu

$$H = 4\pi n_1 I = 31,42.$$

3. *Un courant circulaire mobile autour d'un axe vertical s'est orienté sous l'action de la Terre en un lieu où l'intensité horizontale* H *est égale à* 0,192 *unités* C.G.S.; *le rayon du courant est de* 1^m, *et l'intensité du courant égale* 1 *ampère. On propose de calculer l'intensité* H′ *du champ au centre même du courant circulaire.*

Les flux de force se sont superposés dans l'orientation du courant; les intensités s'ajoutent donc au centre.

Quelle est la force exercée au centre du cercle sur l'unité de pôle?

Fig. 81.

Cherchons le potentiel en un point A, situé sur l'axe du cercle OM (*fig.* 81) :

$$(1) \qquad V = I\omega + C,$$

$$\omega = 2\pi(1 - \cos\theta) = 2\pi\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right),$$

$$V = 2\pi\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right) + C,$$

$$H = -\frac{dV}{da} = 2I\frac{\pi R^2}{(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2IS}{(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

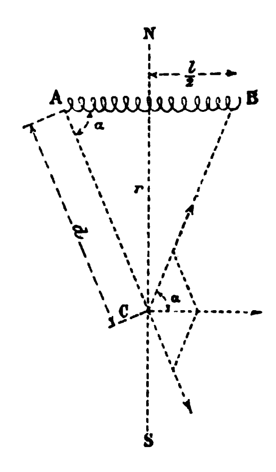
Au centre O,

$$H' = \frac{2\pi I}{R} = \frac{2\pi \times 0,1}{100} = 0,0063.$$

L'intensité totale du champ en O est par conséquent égale à $0,192 + 0.0063 = 0,1983$ unités C.G.S.

4. *Dans l'expérience classique de Gauss, on peut remplacer l'aimant fixe par un solénoïde* AB, *traversé par un courant, et l'on détermine* H *par l'observation de la déviation* φ *d'une aiguille mobile, infiniment petite, placée en* C, *sur la perpendiculaire élevée au milieu de l'aimant, dans le méridien* (*fig.* 82).

Fig. 82.



A une distance d des pôles du solénoïde égale à 25cm, *on a observé une déviation* φ *de* 10° 12′, *l'intensité du courant étant de* 2 *ampères; le solénoïde est formé de* 250 *spires, son diamètre est de* 5cm *et il mesure* 35cm *de longueur. Calculer* H *d'après ces données.*

Cherchons d'abord à déterminer la masse polaire m d'un

aimant équivalent au solénoïde AB :

$$(2) \qquad m = \frac{n\text{IS}}{l} = \frac{250 \times 0,2 \times 19,63}{35} = 28,04.$$

Soit m' la quantité de magnétisme des pôles de l'aiguille mobile : l'action mutuelle des pôles en présence est

$$f = \frac{2mm'}{d^2}\cos\alpha = \frac{2mm'}{d^2}\,\frac{l}{2d} = \frac{mm'l}{d^3}.$$

D'autre part,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{f}{m'\text{H}} = \frac{ml}{\text{H}d^3}.$$

Il vient donc

$$\text{H} = \frac{ml}{d^3}\,\frac{1}{\operatorname{tang}\varphi} = \frac{28,04 \times 35}{\left(\frac{l^2}{4} + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{\operatorname{tang} 10^\circ 12'}$$

$$= \frac{28,04 \times 35}{(931)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{\operatorname{tang} 10^\circ 12'} = 0,192 \text{ unités C.G.S.}$$

5. *Un solénoïde, formé de* 200 *spires de* 4^{cm} *de diamètre, est suspendu par un fil d'argent dont le couple de torsion, évalué en unités* C.G.S., *est égal à* 16,13; *sa longueur est de* 15^{cm} *et l'intensité horizontale du champ magnétique terrestre est de* 0,192 *unités* C.G.S. *Dans la position d'équilibre, l'axe du solénoïde est perpendiculaire au méridien; on y fait passer un courant d'intensité* I *et l'on observe par la méthode de Poggendorff une déviation* φ *de* 2°5′. *Calculer la valeur de* I *d'après ces données.*

Le moment magnétique du solénoïde est nIS; on a donc

$$(3) \qquad \text{H}n\text{IS}\cos\varphi = \text{C}l\,\frac{\pi}{180}\,\varphi,$$

et l'on en déduit

$$I = \frac{C l \pi}{H n S \times 180} \frac{\varphi}{\cos\varphi}$$

$$= \frac{16,13 \times 15 \times 3.1416}{0,192 \times 200 \times 12,57 \times 180} \frac{2.83}{\cos 2^\circ 5'}$$

$$= 0,0247 \text{ unités C.G.S.}$$

$$= 0,247 \text{ ampère.}$$

6. *On introduit, dans un champ magnétique uniforme. d'intensité* H', *un conducteur rectiligne de longueur* $l = 2^{cm}$, *traversé par un courant de* 10 *ampères, et on le dispose dans une direction perpendiculaire à celle des lignes de force du champ : on constate que ce conducteur est soumis à une force* f *de* 180 *dynes. On demande de déterminer l'intensité du champ considéré.*

Le conducteur est soumis à l'action du champ magnétique terrestre, en même temps qu'à celle du champ qu'on se propose d'étudier. La force exercée est donnée par la relation

$$f = HIl.$$

Or, quelle que soit la position du fil conducteur dans le champ terrestre, on peut considérer cette action comme négligeable; en effet, en prenant l'intensité totale de ce champ égale à 0,465, on trouverait que la force supportée de ce chef par le courant égale

$$0,465 \times 1 \times 2 = 0,930 \text{ dyne,}$$

soit $\frac{1}{180}$ de l'effort mesuré. N'en tenons donc pas compte, et posons

$$H = \frac{f}{Il} = \frac{180}{1 \times 2} = 90 \text{ unités C.G.S.,}$$

à $\frac{1}{2}$ unité près.

On trouve sans difficulté la direction perpendiculaire à celle des lignes de force, attendu que, dans cette direction, l'action doit être maximum.

7. *Calculer l'intensité moyenne du champ à l'intérieur d'une bobine annulaire, en forme de tore, de rayon* R, *a étant le rayon de la section circulaire, et n le nombre des spires comprises entre deux plans méridiens qui font entre eux un angle égal à l'unité; le courant a une intensité* I.

Décomposons ce système en une série de solénoïdes élémentaires, comprenant un même nombre de courants de même intensité I, mais de longueurs différentes; soit x leur rayon. La distance des spires successives sera égale à $\frac{x}{n_1}$ et l'intensité magnétique du filet correspondant sera $\frac{n_1 I}{x}$.

Pour une section S, le flux a pour valeur

$$4\pi n_1 I \int \frac{dS}{x}.$$

Calculons $\int \frac{dS}{x}$ entre les limites $R - a$ et $R + a$; il vient

$$\int_{R-a}^{R+a} \frac{dS}{x} = \int_{R-a}^{R+a} \frac{y\,dx}{x} = \int_{R-a}^{R+a} \frac{\sqrt{a^2-(R-x)^2}}{x}\,dx.$$

L'intégrale proposée, mise sous la forme

$$\int \frac{a^2-(R-x)^2}{x\sqrt{a^2-(R-x)^2}}\,dx,$$

peut être décomposée en trois autres :

$$(a^2-R^2)\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-(R-x)^2}},$$
$$+\int \frac{(R-x)\,dx}{\sqrt{a^2-(R-x)^2}},$$
$$+\int \frac{R\,dx}{\sqrt{a^2-(R-x)^2}}.$$

Pour intégrer la première expression, posons $z = \frac{1}{x}$, d'où

$dz = -\dfrac{dx}{x^2}$, ce qui donne

$$
\begin{aligned}
&(a^2 - R^2)\int \frac{-dz}{\sqrt{(a^2-R^2)z^2 + 2Rz - 1}}\\
&= \sqrt{R^2-a^2}\int \frac{dz}{\sqrt{-z^2 + \dfrac{2Rz}{R^2-a^2} - \dfrac{1}{R^2-a^2}}}\\
&= \sqrt{R^2-a^2}\int \frac{dz}{\sqrt{\dfrac{a^2}{(R^2-a^2)^2} - \left(z - \dfrac{R}{R^2-a^2}\right)^2}}\\
&= \sqrt{R^2-a^2}\int \frac{dz : \dfrac{a}{R^2-a^2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{z - \dfrac{R}{R^2-a^2}}{\dfrac{a}{R^2-a^2}}\right)^2}}\\
&= \sqrt{R^2-a^2}\,\text{arc cos}\,\frac{z(R^2-a^2) - R}{a}\\
&= \sqrt{R^2-a^2}\,\text{arc cos}\,\frac{R^2-a^2-Rx}{ax}.
\end{aligned}
$$

Entre les limites $R - a$ et $R + a$, nous aurons

$$\sqrt{R^2-a^2}\left[\text{arc cos}\,\frac{(R+a)(R-a)}{ax} - \frac{R}{a}\right]_{R-a}^{R+a} = -\pi\sqrt{R^2-a^2}.$$

La seconde intégrale donne

$$\left[\sqrt{a^2-(R-x)^2}\right]_{R-a}^{R+a} = 0.$$

La troisième

$$R\int_{R-a}^{R+a} \frac{\dfrac{dx}{a}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{R-x}{a}\right)^2}} = R\left(\text{arc cos}\,\frac{R-x}{a}\right)_{R-a}^{R+a} = \pi R.$$

Le flux total a donc pour valeur

$$Q = 4\pi^2 n_1 I(R - \sqrt{R^2 - a^2}),$$

et l'intensité moyenne du champ est égale à

$$H_m = \frac{4\pi n_1 I}{a^2}(R - \sqrt{R^2 - a^2}).$$

8. *Calculer le travail nécessaire pour faire tourner de* 180° *un courant mobile flottant de de la Rive, orienté par l'action de la Terre et placé perpendiculairement au méridien; le champ terrestre a une intensité horizontale* $H = 0,192$, *le cercle mesure* 10^{cm} *de rayon et l'intensité du courant égale* 1 *ampère.*

La position d'équilibre correspond au maximum du flux de force à travers la face négative du circuit : dans cette position, l'énergie

$$W = -HIS; \tag{10}$$

après retournement du courant, face pour face, nous avons

$$W' = HIS.$$

Le travail dépensé contre les forces électromagnétiques terrestres est, dans cette opération,

$$W' - W = 2HIS = 2 \times 0,192 \times 0,1 \times 314,16 = 12,06 \text{ ergs.}$$

Ce travail est difficilement mesurable; mais on sait que Weber a indiqué une méthode de détermination de la tangente de l'inclinaison par un procédé de retournement analogue, en mesurant au galvanomètre les quantités d'électricité induites dans ces mouvements des cadres.

9. *Étant donné que la roue de Barlow se meut dans un champ magnétique uniforme, d'intensité* H', *parallèle à son axe, calculer le travail développé par tour de roue par un courant d'intensité* I.

Soient R le rayon de la roue et θ l'angle de deux dents consécutives; on peut admettre qu'il y ait toujours une dent au contact du mercure. Le flux de force Q est égal au produit de la surface du secteur formé par les rayons correspondants à deux dents consécutives par l'intensité du champ

$$Q = H' \frac{R^2 \sin\theta}{2}.$$

Il en résulte que le travail $\Delta\mathfrak{T}$ développé dans la rotation θ est égal à

$$(10) \qquad \Delta\mathfrak{T} = IH' \frac{R^2 \sin^2\theta}{2};$$

pour un tour de roue, nous aurons

$$\mathfrak{T} = IH'S;$$

le travail est donc égal à la surface de la roue multipliée par le produit IH′ de l'intensité du courant par l'intensité du champ.

10. *Un conducteur tournant de Jamin se meut autour d'un pôle m; le circuit descend jusqu'au milieu de l'aimant. On demande la valeur du moment* $\mathfrak{M}$ *du couple de rotation par rapport à l'axe, pour un courant d'intensité* I.

Le circuit embrasse dans son mouvement le flux total émané du pôle et le travail électromagnétique dépensé par tour est égal à $4\pi m I$; il en résulte que

$$\mathfrak{M} = \frac{4\pi m I}{2\pi} = 2mI.$$

11. *Calculer l'attraction exercée par un fil de* 100^cm^ *de long sur un fil de* 10^cm^ *de longueur, parallèle, situé à* 3^cm^ *de distance du premier, les deux courants étant égaux à* 1 *ampère et de même sens.*

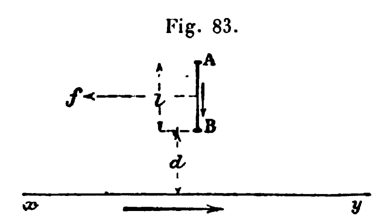
L'attraction sera sensiblement la même que si le conduc-

teur fixe avait une longueur infinie ; nous pourrons donc écrire

$$(7)\qquad f = \frac{2\mathrm{II}'l}{d} = \frac{2\mathrm{I}^2 l}{d} = \frac{2 \times \overline{0,1}^2 \times 10}{3} = 0,07 \text{ dyne } (^1).$$

12. *Un fil rectiligne* AB *de* 2cm *de longueur est parcouru par un courant d'un ampère; il peut se mouvoir parallèlement à lui-même le long d'un courant rectiligne indéfini* xy (*fig.* 83), *auquel il reste perpendiculaire. Quelle force agit*

Fig. 83.



sur le courant mobile? Le courant xy *a* 10 *ampères d'intensité et la distance* AC $= d$ *est de* 2cm; xy *va de gauche à droite et* BA *est descendant.*

$$(8)\qquad \begin{cases} f = 2\mathrm{II}'\dfrac{l}{d}\left(1 - \dfrac{l}{2d}\right) \\ \quad = 2 \times 0,1 \times 1 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = 0,1 \text{ dyne.} \end{cases}$$

Le circuit mobile remontera le courant xy.

13. *Une boussole des tangentes porte* 15 *tours de fil, dont la longueur développée est de* 1899cm; *en un lieu où l'intensité horizontale* $\mathrm{H} = 0,188$, *on relève une déviation de* 45° : *quelle est, en ampères, l'intensité du courant qui a donné cette déviation?*

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{RH}}{2n\pi}\operatorname{tang}\varphi\left(1 - \frac{3l^2}{16\mathrm{R}^2} + \dots\right).$$

---

(1) L'intensité du courant a été exprimée dans cette formule en unités absolues : nous pourrions nous dispenser de faire cette remarque, qui s'applique du reste à tous les exercices de ce Chapitre, dans lesquels l'intensité est rapportée aux ampères.

Négligeons le terme de correction : si la longueur de l'aiguille est le $\frac{1}{30}$ de R, la correction n'atteindrait pas le $\frac{1}{100}$, même avec une déviation de 45°. On est donc autorisé généralement à ne pas tenir compte du facteur compris dans la parenthèse et il vient

$$R = \frac{1899}{15 \times 2 \times 3,1416} = 20^{cm},15$$

et

$$I = \frac{20,15 \times 0,188}{2 \times 15 \times 3,1416} = 0,0419 \text{ unités C.G.S.}$$
$$= 0,419 \text{ ampère.}$$

14. *On introduit dans le circuit d'une pile constante un voltamètre au sulfate de cuivre, muni d'électrodes de cuivre, et une boussole des tangentes; on observe une déviation moyenne de* 33°33′ *et, après une heure d'essai, on constate une perte de l'électrode soluble de* $0^{gr},360$ *et un gain de* $0^{gr},355$. *Déduire de cette expérience l'intensité horizontale* H *du magnétisme terrestre : on sait que* $\frac{R}{2n\pi} = 0,233$.

Un ampère-heure dépose $1^{gr},190$ de cuivre.

On pourra égaler les intensités ressortant de la double observation qui a été faite : il vient donc

$$\frac{1}{10}\,\frac{p}{1,190} = 0,233\,H\,\text{tang}\,\varphi,$$

$$H = \frac{p}{10 \times 1,190 \times 0,233 \times \text{tang}\,33°33'} = 0,188.$$

En répétant cet essai dans les diverses salles d'un bâtiment à charpentes de fer, M. Witz a pu déterminer les variations de l'intensité du champ magnétique dans les édifices : il a démontré que l'étalonnage des galvanomètres ordinaires n'est point admissible, si on les déplace.

15. *Deux courants périodiques sinusoïdaux sont dirigés tour à tour dans les deux circuits d'un électrodynamomètre et on*

lit des déviations α et β; puis on lance un des courants dans la bobine mobile, l'autre dans le circuit fixe, et l'on observe une déviation γ. Quelle est la différence de phase ω de ces deux courants?

Les deux courants sinusoïdaux peuvent être représentés par les équations

$$I = A \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$I' = B \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - \omega\right).$$

La bobine mobile tend à tourner sous l'action d'un couple proportionnel à la valeur moyenne

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T II'\,dt &= \frac{1}{T}\int_0^T AB \sin 2\pi \frac{t}{T} \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - \omega\right) dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{AB}{2}\left[\cos\left(4\pi \frac{t}{T} - \omega\right) - \cos\omega\right] dt \\ &= \frac{AB}{2}\cos\omega, \end{aligned}$$

et une déviation δ est donnée par l'équation

$$\delta = KAB \cos\omega.$$

Pour la première expérience, nous aurons donc

$$\alpha = KA^2,$$

car $\omega = 0$ et $A = B$.

La seconde expérience permet d'écrire

$$\beta = KB^2$$

pour les mêmes raisons; enfin la troisième donne

$$\gamma = KAB \cos\omega,$$

d'où

$$\cos\omega = \frac{\gamma}{KAB},$$

et

$$\cos^2\omega = \frac{\gamma^2}{\alpha\beta}.$$

Cette ingénieuse méthode a permis à M. Ferraris de mesurer les différences de phase et les retards d'induction produits dans les transformateurs [1].

16. *Dans une bobine cylindrique de grande longueur, de* 6^{cm} *de rayon extérieur, comptant* $n_1 = 8$ *spires par unité de longueur, parcourue par un courant de* 10 *ampères, on introduit un noyau de fer doux dont le coefficient de susceptibilité magnétique est égal à* 32, *et l'on demande de calculer le flux total* Q *d'induction magnétique qui traverse le barreau.*

L'intensité du champ intérieur d'une bobine de grande longueur est $4\pi n_1 I$ (Exercice 2); l'intensité d'aimantation d'un long cylindre parallèle à ce champ est $4\pi K n_1 I$; enfin l'induction intérieure égale $4\pi \times 4\pi K n_1 I = 16\pi^2 K n_1 I$.

Cela posé, pour une section S, le flux d'induction est

$$16\pi^2 K n_1 IS,$$

et le flux total

$$\begin{aligned} Q &= 4\pi n_1 IS + 16\pi^2 K n_1 IS \\ &= 4\pi n_1 IS(1 + 4\pi K) \\ &= 4.\pi \times 8 \times 1 \times 113,1(1 + 4\pi.32) \\ &= 11767 \text{ unités C.G.S.} \end{aligned}$$

C'est ainsi qu'on peut mesurer le coefficient K de susceptibilité et le coefficient $\mu = 1 + 4\pi K$ de perméabilité : le flux total d'induction magnétique qui traverse les spires se détermine en entourant d'une bobine auxiliaire le milieu de la bobine proposée, et en supprimant brusquement un courant d'intensité connue dans la bobine magnétisante; le flux est égal à $\frac{mR}{n}$, m étant la quantité d'électricité induite dans le cir-

---

[1] La différence de phase est appelée *décalage* par quelques électriciens.

cuit de résistance R formé de n spires. Il suffit d'un galvanomètre pour mesurer m : la bobine auxiliaire peut n'avoir que 2 ou 3 spires.

17. *Un galvanomètre Deprez-d'Arsonval est formé d'un cadre de* 50 *spires, présentant chacune une surface de* 100^{cq}; *ce cadre est mobile dans un champ uniforme de* 20 *unités d'intensité; il pèse* $130^{gr},5$ *et il est suspendu par deux fils parallèles, longs de* 10^{cm} *et distants de* $0^{cm},3$. *On demande quelle est, en ampères, l'intensité d'un courant produisant une déviation de* 15°.

Le moment du couple horizontal C de la suspension bifilaire est égal à

$$C = \frac{Pd^2}{4l} = \frac{130,5 \times \overline{0,3}^2}{4 \times 10} = 0,293 \quad \text{(Exerc. 45, Liv. I, Chap. III)}$$

pour une déviation de 90°.

Admettons, d'autre part, que les 50 spires du cadre soient équivalentes à une spire unique de $50 \times 100 = 5000^{cq}$; ce raisonnement n'est pas rigoureux, à cause de la présence d'un cylindre de fer dans l'intérieur du cadre, mais nous pouvons en admettre l'exactitude.

Nous aurons dès lors

$$IHS \cos\varphi = C \sin\varphi$$

et

$$I = \frac{C}{HS} \operatorname{tang}\varphi = 0,008 \text{ milliampères.}$$

Cet instrument, extrêmement sensible, a de plus l'avantage d'être apériodique.

18. *Une décharge instantanée, lancée dans le fil d'un galvanomètre balistique, y détermine une impulsion* δ *égale à* 35°; *or on sait qu'un courant continu de* 0,3 *ampère produit une déviation* α *de* 39°, *et l'on a constaté que la durée d'une oscillation de l'aiguille, au lieu de l'expérience, est*

de $0^s,98$. *Quelle est la quantité q d'électricité qui a traversé l'appareil?*

Le produit du moment d'inertie (I) de l'aiguille par son accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ est égal au moment du couple résultant par rapport à l'axe de rotation; nous aurons donc, en appelant M le moment magnétique de l'aiguille, G la constante du galvanomètre employé, et $\frac{dq}{dt}$ l'intensité du courant produit,

$$(\mathrm{I})\frac{d\omega}{dt} = \mathrm{MG}\frac{dq}{dt},$$

attendu que le champ a une intensité $\mathrm{G}\frac{dq}{dt}$; l'accélération initiale étant ω_0, il vient

$$(\mathrm{I})\omega_0 = \mathrm{MG}q.$$

Chassée avec cette vitesse ω_0, l'aiguille ne s'arrêtera qu'après avoir épuisé sa force vive en luttant contre l'action terrestre: le travail dépensé de la sorte est égal à

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{I})\omega_0^2 = \mathrm{MH}(1-\cos\delta) = 2\mathrm{MH}\sin^2\frac{\delta}{2},$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{M}^2\mathrm{G}^2q^2}{(\mathrm{I})} = 2\mathrm{MH}\sin^2\frac{\delta}{2}$$

et

$$q = \frac{2}{\mathrm{G}}\sqrt{\frac{(\mathrm{I})\mathrm{H}}{\mathrm{M}}\sin^2\frac{\delta}{2}} = \frac{1}{\mathrm{G}}\sqrt{\frac{(\mathrm{I})\mathrm{H}}{\mathrm{M}}}\,\delta.$$

Mais nous avons, d'autre part, en appelant I l'intensité du courant continu donnant la déviation α,

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{G}}\operatorname{tang}\alpha = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{G}}\alpha\,;$$

de plus, si t est la durée de l'oscillation de l'aiguille, sous l'action de la Terre,

$$t = \pi\sqrt{\frac{(\mathrm{I})}{\mathrm{MH}}}.$$

Réductions faites, il vient

$$q = \frac{I\delta}{\pi\alpha} t = 0{,}084 \text{ coulomb.}$$

19. *Une machine à courants alternatifs donne un courant qui, traversant la bobine mobile et le cadre fixe d'un électrodynamomètre, produit une déviation correspondante à 25 ampères : peut-on admettre que ce soit l'intensité vraie de ce courant?*

L'intensité du courant en un temps t peut être représentée, d'après M. Joubert, par l'équation

$$I_t = \frac{A}{T} \sin \pi \frac{t}{T},$$

dans laquelle T représente la moitié de la période; la quantité d'électricité débitée pendant la durée de cette demi-période est

$$m = \int_0^T I\,dt = \frac{A}{T} \int_0^T \sin \pi \frac{t}{T}\,dt = \frac{2A}{\pi}.$$

La valeur moyenne I_m du courant, c'est-à-dire l'intensité vraie du courant, est dès lors

$$I_m = \frac{2A}{\pi T}.$$

Or le couple exercé entre les deux bobines de l'instrument est égal à $\frac{A^2}{T^2} \sin^2 \pi \frac{t}{T}$.

Mais T est très petit, comparativement à la durée d'oscillation de la bobine, et en réalité la déviation observée est proportionnelle à

$$\frac{1}{T} \int_0^T I^2\,dt = \frac{A^2}{T^3} \int_0^T \sin^2 \pi \frac{t}{T}\,dt.$$

Pour intégrer cette expression, on se rappellera que

$\int \sin^2 x\, dx = \frac{2x - \sin 2x}{4}$, et l'on sera conduit à la valeur

$$\frac{A^2}{2T^2} = I^2,$$

I étant l'intensité proportionnelle à la déviation relevée : nous avons par suite

$$I = \frac{A}{\sqrt{2}T}$$

et

$$I_m \frac{\pi T}{2} = I\sqrt{2}T,$$

$$I_m = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} I = 0,09 I = 22,5 \text{ ampères.}$$

Un électrodynamomètre, intercalé dans le circuit d'une machine à courants alternatifs, marque donc un courant trop intense, dont il ne faut prendre que les $\frac{9}{10}$. Cette démonstration a été donnée par M. Joubert : elle n'est applicable qu'aux machines dont la self-induction est négligeable.

CHAPITRE V.

INDUCTION OU INFLUENCE ([1]).

Tout déplacement relatif d'un conducteur fermé dans un champ galvanique ou magnétique, toute variation dans l'intensité du champ et, en général, toute variation du flux de force embrassé par un circuit y développe un courant induit : ce courant est temporaire et sa durée égale celle de la variation du flux.

Cet énoncé définit les conditions dans lesquelles naissent les courants induits; la *loi de Lenz* détermine leur sens : *Tout déplacement d'un circuit fermé dans un champ produit un courant induit dont l'action magnétique s'oppose au mouvement.*

Enfin le théorème de Neumann permet de calculer l'intensité du courant : *La force électromotrice d'induction est égale au travail qu'accomplirait, dans l'unité de temps, le système magnétique, si l'intensité du courant dans l'induit était égale à l'unité.* Ce théorème suppose que l'induction reste proportionnelle à la vitesse de déplacement du conducteur dans le champ.

La force électromotrice d'induction E est égale, à chaque instant, à la dérivée $\frac{dQ}{dt}$ du flux de force magnétique traversant le circuit par rapport au temps : si la valeur de dQ est positive, c'est-à-dire si le flux de force augmente, le déplacement se fait en obéissant aux forces électromagnétiques et le travail de ces forces est positif; le courant induit s'opposera à

([1]) Le mot anglais *induction*, qui a prévalu, est strictement équivalent au mot *influence*, que l'on a conservé en Électrostatique.



l'augmentation du flux, et il sera par conséquent de sens inverse à celui qui produirait ce flux. Le signe du courant change avec le signe de la variation du flux; il s'intervertit donc lorsque le flux passe par un maximum.

La quantité dm induite est donnée par l'équation

$$dm\,\mathrm{R} = \mathrm{I}\,dt\,\mathrm{R} = d\mathrm{Q},$$

dans laquelle I est l'intensité du courant induit et R la résistance de l'induit : dm est mis en mouvement pendant le temps dt et l'intensité $\mathrm{I} = \frac{d\mathrm{Q}}{\mathrm{R}\,dt}$ est en raison inverse de R et de dt. D'autre part, on voit que la quantité est indépendante du temps employé au déplacement ou à la variation d'intensité du champ : car

$$m = \frac{\mathrm{Q}_1 - \mathrm{Q}_0}{\mathrm{R}}. \tag{1}$$

Ces résultats sont compris dans cette formule générale :

La quantité d'électricité induite par un déplacement déterminé dans le champ est égale au quotient de la variation correspondante $\mathrm{Q}_1 - \mathrm{Q}_0$ *du flux de force par la résistance* R *du circuit, et la force électromotrice induite est égale à* $\mathrm{Q}_1 - \mathrm{Q}_0$.

C'est le plus souvent au déplacement d'un conducteur dans un champ qu'on demande les effets d'induction; la force électromotrice qui se développe alors dans un circuit rectiligne de longueur l, traversant un champ d'intensité H avec une vitesse v, en coupant les lignes de force sous l'angle α, la direction du mouvement étant celle de la réaction du champ, est

$$\mathrm{E} = \mathrm{H}\,lv\sin\alpha. \tag{1 bis}$$

Si la direction du mouvement faisait un angle φ avec la direction de la force du champ, on aurait

$$\mathrm{E} = \mathrm{H}\,lv\sin\alpha\cos\varphi.$$

La direction du courant induit se détermine par la règle suivante, calquéé sur la règle d'Ampère : un observateur

couché dans le champ, suivant les lignes de force et regardant dans le sens du mouvement du conducteur, verra le courant induit circuler de gauche à droite ([1]).

Abordons maintenant l'étude des coefficients d'induction.

Que le système inducteur soit un feuillet magnétique ou un courant, le flux Q est toujours égal au produit d'un facteur constant M par la puissance du feuillet ou du courant : c'est une fonction de la forme et de la position des circuits; on l'appelle le *coefficient d'induction mutuelle.*

Sa dimension est une longueur.

Le coefficient d'induction mutuelle étant connu, on peut calculer la force électromotrice induite dans un circuit à un instant quelconque par la formule

$$E = M\frac{dI}{dt}. \tag{2}$$

Mais, outre le flux de force provenant des corps extérieurs, il y a à tenir compte du flux de force produit par le courant qui parcourt le circuit induit lui-même. Or, appelons L ce flux de force pour une intensité égale à l'unité; L est un coefficient de même forme que M et on l'appelle le *coefficient de self-induction.* Sa valeur est la limite vers laquelle tend celle de M quand deux circuits égaux s'approchent de la coïncidence.

Sa dimension est aussi une longueur ([2]).

La self-induction augmente ou diminue l'intensité d'un courant pendant la période variable; étant donné un circuit de résistance R, siège d'une force électromotrice E et ayant un coefficient L de self-induction, on a la relation

$$E = IR + \frac{d(LI)}{dt}. \tag{3}$$

([1]) La direction d'une ligne de force est celle que suivrait un pôle austral sur cette ligne; il irait évidemment du pôle nord au pôle sud d'un aimant; c'est ce qu'on appelle quelquefois la direction positive des lignes de force.

([2]) En effet,

$$L = E_1\frac{dt}{dI} = \frac{ET}{I} = \frac{(M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-2})T}{M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1}} = [L].$$



Les effets de self-induction sont marqués surtout au moment de la fermeture ou de la rupture du circuit; dans ce cas, ces effets règlent l'intensité aux divers instants de la période variable, et l'on peut calculer l'intensité I au bout d'un temps t.

Pour le démontrer, supposons L constant, ainsi que E; l'intensité à chaque instant sera donnée par la formule

$$(4)\qquad I = I_1 + (I_0 - I_1)e^{-\frac{Rt}{L}},$$

I_0 étant la valeur initiale et I_1 la valeur finale qui correspond à l'état permanent.

La quantité totale d'électricité qui passe pendant le temps T a pour expression

$$\int_0^T i\,dt = I_1 T + (I_0 - I_1)\frac{L}{R}\left(1 - e^{-\frac{RT}{L}}\right),$$

ou approximativement

$$(5)\qquad = I_1 T + (I_0 - I_1)\frac{L}{R},$$

si le temps T est assez long.

En particulier, considérons le moment de la fermeture du circuit et comptons le temps à partir de cet instant :

$$I_0 = 0, \qquad I_1 = \frac{E}{R},$$

$$(6)\qquad I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right).$$

Cette équation donne l'extra-courant de fermeture à l'instant t; c'est $\frac{E}{R}e^{-\frac{Rt}{L}}$; la quantité totale d'électricité qui lui correspond est

$$(7)\qquad \frac{E}{R}\int_0^{\infty} e^{-\frac{Rt}{L}}\,dt = \frac{EL}{R^2}.$$

Elle est la même que si le courant avait eu une intensité moitié moindre que la valeur normale pendant le temps $\frac{2L}{R}$.

L'effet de self-induction semble augmenter la résistance du circuit; mais ce n'est qu'une apparence. On dirait une sorte de retard à la transmission de la force électromotrice. C'est le résultat prévu de l'induction; mais on l'expliquera d'une façon plus complète en se rappelant que l'établissement d'un courant dans un circuit coûte un certain travail et qu'il faut nécessairement, pour y suffire, qu'une certaine quantité d'énergie soit absorbée au début du courant : elle sera restituée au moment de la rupture du circuit. L'énergie absorbée et restituée a une valeur égale à

$$(8) \qquad W = L\frac{I^2}{2}.$$

Pour obtenir des circuits sans self-induction, il faut rouler des bobines à double fil, pour lesquelles le flux de force est nul.

Les coefficients M et L jouent un rôle considérable dans les calculs auxquels donnent lieu les phénomènes d'induction : il nous reste à déterminer ces coefficients dans quelques cas simples.

Considérons un solénoïde circulaire cylindrique, de n_1 spires par unité de longueur, ayant une surface S; nous le supposerons assez long pour qu'on puisse, dans une partie notable de sa longueur, négliger l'action de ses extrémités : soit I l'intensité du courant. Le flux de force est égal à $4\pi n_1 IS$; si l'on enroule sur ce cylindre n'_1 spires nouvelles, d'un diamètre quelconque, le flux de force du solénoïde proposé traverse n'_1 fois la surface du second et le coefficient d'induction M égale

$$(9) \qquad M = 4\pi n_1 n'_1 S;$$

le même flux traverse n_1 fois la surface du premier circuit et le coefficient de self-induction L du solénoïde égale

$$(10) \qquad L = 4\pi n_1^2 S.$$

La présence d'un noyau de fer doux à l'intérieur d'une bobine augmente la valeur des coefficients d'induction. Si l'on admet que l'aimantation soit proportionnelle à la force magnétisante, l'induction magnétique dans l'espace occupé par



le fer doux est égale à la valeur primitive multipliée par $\mu = 1 + 4\pi K$; on écrira donc

$$M = 4\pi n_1 (n'_1 S + 4\pi K \pi r^2),$$

r étant le rayon du noyau de fer doux.

Reconnaissons toutefois que, pour des bobines enroulées à la manière ordinaire, le calcul ne donne pas de résultats satisfaisants; il faudrait que le fil fût enroulé dans des gorges creusées à l'avance. Le coefficient de self-induction des bobines se détermine donc par l'expérience; plusieurs méthodes ont été proposées et employées. Maxwell mesurait à cet effet la quantité d'électricité mise en mouvement par l'extra-courant de rupture; M. Joubert a fait connaître une méthode élégante reposant sur l'observation des courants alternatifs par l'électromètre à quadrants; enfin M. Ledeboer a utilisé le pont de Wheatstone. Voici quelques résultats publiés par ce dernier savant.

Bobine à gros fil.

Sans noyau de fer.........	$L = 0,00085 \times 10^9$ centimètres.
Avec noyau de fer.........	$L = 0,0088 \times 10^9$ centimètres.

L'introduction d'un noyau de fer peut donc décupler la valeur du coefficient de self-induction d'une bobine.

APPLICATIONS.

1. *Faraday a proposé de plonger dans l'eau, sur les deux rives d'un fleuve coulant de l'Est à l'Ouest, d'une largeur* $l = 2500^{cm}$, *deux électrodes reliées par un conducteur métallique; soit* $v = 100^{cm}$ *la vitesse du courant, produit par une pente au* $\frac{1}{1000}$, *et* $R = 1$ *ohm la résistance du fil conjonctif. Quelle sera l'intensité* I *du courant induit dans ce fil, sachant qu'au lieu considéré l'inclinaison est égale à* 65° 15′ 6″, *et que l'intensité horizontale* H *du magnétisme terrestre a une valeur de* 0,194 *unités?*

Une pente de $\frac{1}{1000}$ équivaut à un angle δ de 3′ 26″ sur l'ho-

rizon, et l'intensité efficace du magnétisme terrestre sera

$$H' = H \operatorname{tang} i \cos \delta$$
$$= 0{,}421.$$

Les tranches de liquide se déplacent perpendiculairement aux lignes de force du champ et $\sin\alpha = 1$.

La quantité m d'électricité induite est égale à

(1) $$\frac{Q_0 - Q_1}{R} = H' l v;$$

on peut donc écrire

$$I t = \frac{H'}{R} l v t,$$

ou

$$I = \frac{H'}{R} l v$$
$$= \frac{0{,}421}{10^9} \times 2500 \times 100$$
$$= \frac{105250}{10^9} = 1{,}05 \times 10^{-4} \text{ unités C.G.S.}$$
$$= 1{,}05 . 10^{-3} \text{ ampère}$$
$$= 1{,}05 \text{ milliampère.}$$

La force électromotrice qui produit ce courant est égale à

$$105250 \text{ unités C.G.S.} = 1{,}05 . 10^{-3} \text{ volt.}$$

2. *Un conducteur de longueur $l = 10^{cm}$ coupe sous un angle α de 45° les lignes de force d'un champ magnétique d'intensité H = 1000 unités, avec une vitesse de 1^m à la seconde, la direction du mouvement étant celle de la réaction du champ; calculer la force électromotrice du courant induit.*

(1 *bis*) $$\left\{\begin{aligned} E &= H l v \sin\alpha \\ &= 1000 \times 10 \times 100 \times \sin 45° \\ &= 707107 \text{ unités C.G.S.} \\ &= 0{,}0071 \text{ volt.} \end{aligned}\right.$$

3. *Un cerceau de Delezenne, formé d'une seule spire de 25^cm de rayon, mobile autour d'un axe vertical, est placé perpendiculairement à la direction horizontale du champ magnétique terrestre, en un lieu où* $H = 0,190$; *on le fait tourner en une seconde de* 180° *et l'on recueille le courant produit dans un conducteur de* 0,01 *ohm de résistance; on demande de calculer l'intensité de ce courant en ampères.*

Si nous négligeons la résistance du cerceau, nous aurons

$$mR = IRt = HS(1 - \cos 180^\circ) = 2HS,$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{2HS}{R} \\ &= \frac{2 \times 0,190 \times 490,9}{0,01 \times 10^9} \\ &= 0,186 \times 10^{-4} \text{ unités C.G.S.} \\ &= 0,186 \times 10^{-3} \text{ ampère} \\ &= 0,186 \text{ milliampère.} \end{aligned}$$

Une augmentation du nombre des spires ferait croître proportionnellement la force électromotrice induite; mais il y aurait alors lieu de tenir compte de la résistance croissante du cerceau.

4. *Un disque de Faraday, de* 5^cm *de rayon, tourne à la vitesse d'un tour et demi par seconde dans le champ magnétique terrestre; son axe de rotation est parallèle à la direction du champ, dont l'intensité totale est égale à* 0,465 : *un conducteur relie l'axe de rotation à une lame de ressort qui appuie sur un point de la circonférence. Quelle est la différence de potentiel entre les extrémités du circuit?*

$$E = \frac{dQ}{dt} = H\frac{\omega R^2}{2} = H\pi n R^2.$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} E &= 0,0465 \times \pi \times 1,5 \times \bar{5}^2 \\ &= 54,75 \text{ unités C.G.S.} \\ &= 0,547 \times 10^{-3} \text{ volt.} \end{aligned}$$

Si la direction du champ est celle de l'axe et que sa force s'exerce d'avant en arrière, le sens de la rotation étant celle qui correspond à ce mouvement du tire-bouchon de Maxwell, le courant ira du centre à la circonférence.

En réalité, Faraday faisait tourner son disque entre les pôles d'un aimant; mais le calcul de la force électromotrice du courant induit est alors beaucoup plus compliqué.

5. *Un wagon d'express roule, à une vitesse v de* 90^{km} *à l'heure, sur une voie ferrée horizontale dirigée de l'Est à l'Ouest, dont les rails sont écartés de* $1^m,51$ *d'axe en axe; l'intensité* V *verticale du magnétisme terrestre est égale à* 0,425. *On demande de calculer la force électromotrice engendrée par la progression d'un essieu du wagon.*

L'essieu coupe normalement les lignes de force du magnétisme terrestre; la force électromotrice développée est donc, en appelant d l'écartement des rails,

$$E = Vvd. \tag{1 bis}$$

La vitesse v est égale à $\frac{9000000}{3600} = 2500^{cm}$ à la seconde; il vient par conséquent

$$\begin{aligned} E &= 0,425 \times 2500 \times 151 \\ &= 160437 \text{ unités C.G.S.} \\ &= 0,1604 \times 10^{-2} \text{ volt.} \end{aligned}$$

Le courant produit pourrait être recueilli dans un conducteur reliant les rails.

6. *Recherche du coefficient d'induction mutuelle pour une bobine de Ruhmkorff formée d'une couche unique de gros fil inducteur, comprenant* n *tours par unité de longueur, et d'une bobine concentrique de fil fin induit, contenant* N *tours par unité de longueur;* S *est la section du solénoïde simple inducteur,* r *son rayon et* R *le rayon extérieur de la bobine induite.*

Le coefficient d'induction mutuelle ne dépend que de la forme et de la position des deux circuits; c'est le flux de force embrassé par la bobine induite pour un courant égal à l'unité dans l'inducteur. Ce flux de force a pour valeur

$$4\pi n S;$$

il traverse N fois la surface de l'induit; on sait donc que le coefficient d'induction serait égal à

$$(9) \qquad 4\pi n NS = 4\pi^2 n N r^2$$

pour une seule couche d'induit; pour des couches plus nombreuses, il faut chercher combien de fils coupent le plan méridien par unité de section, dans la bobine extérieure induite: nous savons qu'il y en a N^2 par unité de surface. Pour une épaisseur dr, et par unité de longueur, nous aurons

$$4\pi^2 n N^2 \int r^2 \, dr;$$

intégrant entre les limites R et r, il vient finalement

$$M = \frac{4}{3}\pi^2 N^2 n (R^3 - r^3).$$

Nous avons fait abstraction, dans ce calcul, de l'effet des extrémités.

7. *Calcul du coefficient de self-induction d'une bobine de rayons r_1 et R, comptant N tours de fil par unité de longueur.*

Dans le problème précédent, nous avons trouvé le coefficient d'induction mutuelle d'un solénoïde simple sur une bobine qui l'enveloppe; pour déterminer le coefficient d'auto-induction, il nous faut encore calculer le coefficient d'induction mutuelle entre deux bobines, en remplaçant le solénoïde de l'exercice précédent par une bobine de rayons r_1 et ρ. Il viendra

$$(10) \qquad \begin{cases} M = \frac{4}{3}\pi^2 N^2 (R^3 - r^3) n^2 (r_1 - \rho) \\ \quad = \frac{4}{3}\pi^2 N^2 n^2 (R^3 - r^3)(r_1 - \rho). \end{cases}$$

Mais le coefficient de self-induction est la limite vers laquelle tend le coefficient d'induction mutuelle de deux circuits identiques, parcourus par un courant de même sens et de même intensité, quand ils se confondent.

Faisons donc $n = \mathrm{N}$ et $\mathrm{R} = r_1$, $r = \rho$, nous aurons

$$(10) \qquad \mathrm{L} = \frac{4}{3}\pi^2 \mathrm{N}^4 (\mathrm{R}^3 - r^3)(\mathrm{R} - r).$$

8. *On ferme un circuit, composé d'une bobine de* 6 *ohms de résistance, dont le coefficient de self-induction est égal à* $0,002 \times 10^9$ *centimètres; la force électromotrice est de* 10 *volts. Quelle sera l'intensité du courant au bout d'un millième de seconde?*

L'intensité normale serait de $\frac{10}{6} = 1,667$ ampère. Au bout d'une seconde, nous aurons

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{I} &= 1,667\left(1 - e^{-\frac{\mathrm{R}t}{\mathrm{L}}}\right) \\ &= 1,667\left(1 - e^{-\frac{6 \times 10^9}{0,002 \times 10^9 \times 1000}}\right) \\ &= 1,667(1 - 0,0498) \\ &= 1,583 \text{ ampère.} \end{aligned} \right.$$

9. *Quelle est la quantité d'électricité de l'extra-courant de fermeture, dans le cas proposé ci-dessus?*

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{M} &= \frac{\mathrm{EL}}{\mathrm{R}^2} \\ &= \frac{10 \times 10^8 \times 0,002 \times 10^9}{36 \times 10^{18}} \\ &= 0,00006 \text{ coulomb} \\ &= 60 \text{ micro-coulombs.} \end{aligned} \right.$$

10. *L'établissement d'un courant dans une bobine absorbe une certaine quantité d'énergie et cet effet ne permet au courant d'atteindre son intensité normale qu'au bout d'un temps*

infini. On propose de calculer le temps nécessaire pour que dans une bobine, pour laquelle R = 2 *ohms et* L = 0,095 × 10⁹ *centimètres, un courant de* 5 *ampères ne diffère que de* $\frac{1}{100}$ *de sa valeur normale; on déterminera de plus la somme d'énergie emmagasinée à l'état potentiel.*

Nous avons vu que l'intensité du courant est donnée par l'équation

$$(6) \qquad I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right);$$

au bout du temps t, le courant a donc pris la valeur $\frac{E}{R}e^{-\frac{Rt}{L}}$ et, la différence entre son intensité vraie et son intensité normale étant moindre que $\frac{1}{100}$, on aura

$$e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{1}{100},$$

d'où

$$t = \frac{L}{R}\log' 100 = \frac{0,095 \times 10^9}{2 \times 10^9} \times 4,605 = 0^s,22.$$

Quant à l'énergie emmagasinée, elle est

$$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \times 0,095 \times 10^9 \times \overline{5}^2 \times 10^{-2} = 1188 \times 10^4 \text{ ergs}.$$

11. *Dans l'expérience de Foucault, un disque circulaire de cuivre, de* 10^{cm} *de diamètre, atteint une vitesse de* 40 *tours à la seconde, et, à ce moment, sa température s'accroît de* 0°,92 : *déduire de cette expérience la valeur de* J?

$$J = \frac{\mathfrak{T}}{Q},$$

$\mathfrak{T}$ étant le travail équivalent à la chaleur Q.

Mais

$$\mathfrak{T} = \int \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \int mr^2$$
$$= \frac{1}{2}\omega^2 \frac{MR^2}{2} = \frac{1}{4}\omega^2 MR^2,$$

en appelant R le rayon du disque et M sa masse totale.

Nous pouvons écrire, d'autre part,

$$Q = MC\theta,$$

d'où

$$J = \frac{1}{4}\,\frac{\omega^2 MR^2}{MC\theta} = \frac{4\pi^2 n^2 MR^2}{4MC\theta}$$

$$= \frac{\pi^2 n^2 R^2}{C\theta} = \frac{9{,}8696 \times \overline{40}^2 \times \overline{0{,}05}^2}{0{,}0951 \times 0{,}92} = 430.$$

12. *Un barreau aimanté dont le moment magnétique* M *est de* 60000 *unités oscille sur un plan horizontal de cuivre; quelle est la quantité de chaleur produite dans une oscillation complète dont le point de départ est à* 90° *du méridien?*

L'énergie W n'a pas changé à la fin d'une oscillation, quand le barreau est revenu à son point de départ; le travail dépensé est MH et nous pouvons égaler ce travail à l'énergie calorifique équivalente JQ; d'où

$$Q = \frac{MH}{J} = \frac{60000 \times 0{,}192}{4{,}17 \times 10^{10}}$$

$$= 0{,}28 \times 10^{-5} \text{ calories}$$

$$= 0{,}28 \times 10^{-2} \text{ calorie-gramme.}$$

13. *Une bobine* A *étant placée dans le voisinage d'une bobine* B, *on cherche à évaluer leur coefficient d'induction mutuelle* M. *A cet effet, on constate d'abord que, si l'on interrompt brusquement en* A *un courant d'intensité* I, *un galvanomètre balistique placé dans le circuit de* B, *ayant une résistance* R′, *subit une impulsion* α. *Mais qu'on enlève* B *et qu'on introduise dans le circuit de* A *le même galvanomètre avec un condensateur de capacité* C; *en interrompant le circuit principal, dont le courant a une intensité* I_1, *le galvanomètre subit une impulsion déterminée due à la décharge du condensateur; cette impulsion devient de nouveau égale à* α *pour une résistance* R_1 : *quelle sera la valeur de* M?

La première expérience nous donne pour la quantité d'électricité induite m, et par suite pour α,

$$m = K\alpha = M\frac{I}{R'}.$$

Dans le second essai, l'impulsion étant rendue égale à α, il passe la même quantité d'électricité m;

$$m = K\alpha = CI_1R_1.$$

Il vient donc

$$M = C\frac{I_1R_1R'}{I}.$$

Cette méthode a été indiquée et appliquée par M. Foster; elle simplifie beaucoup la détermination de M.

14. *Un galvanomètre est intercalé dans le circuit inducteur d'une bobine de Ruhmkorff, traversée par le courant d'une source constante, et l'on observe une déviation* α *égale à* 55°. *On remplace alors le galvanomètre par une résistance équivalente et le rhéomètre est introduit dans le circuit de l'induit de la bobine : une brusque interruption du courant inducteur produit une impulsion* δ *égale à* 8°. *On sait de plus que l'induit a une résistance de* 5 *ohms et l'on compte* 40 *oscillations par minute, quand l'aiguille oscille librement. Calculer, d'après ces données, le coefficient d'induction mutuelle des deux bobines de l'appareil d'induction.*

L'intensité du courant qui traverse l'inducteur a la même valeur I dans les deux expériences : ce courant donne une déviation α au galvanomètre. Nous savons dès lors que la quantité m d'électricité qui produit l'impulsion δ dans le même rhéomètre est égale à .

$$m = \frac{t}{\pi}\frac{\delta}{\alpha}I. \quad \text{(Exercice 18, Chapitre IV, p. 371).}$$

D'autre part, la quantité d'électricité induite dans la se-

conde expérience est égale au quotient de la variation du flux par la résistance de l'induit,

$$m = \frac{Q_1 - Q_0}{R} = \frac{MI}{R}.$$

Égalons ces deux expressions :

$$\frac{t}{\pi}\frac{\delta}{\alpha}I = \frac{MI}{R};$$

d'où (¹)

$$M = \frac{t}{\pi}\frac{\delta}{\alpha}R = \frac{40}{60\pi}\frac{8}{55}5 \times 10^9 = 1,57 \times 10^8;$$

c'est une longueur de 1570^{km}.

15. *On connaît le coefficient* M *de mutuelle induction de deux bobines* A *et* B, *et l'on cherche le coefficient* M′ *de deux bobines* A′ *et* B′. *A cet effet, on relie* A *et* B *en série avec une pile et une clef de contact, tandis que* A′ *et* B′ *sont reliées parallèlement avec un galvanomètre, de manière que les courants induits se neutralisent. L'interruption du courant donne néanmoins une déviation de l'aiguille : on la réduit à zéro par une résistance additionnelle* R. *On demande la valeur de* M′ *en fonction de* M.

Appelons ρ et ρ' les résistances des bobines B et B′; on aura

$$\frac{M}{\rho} = \frac{M'}{\rho' + R};$$

d'où

$$M' = M\frac{\rho' + R}{\rho}.$$

Cette méthode de comparaison est due à Maxwell.

(¹) M étant connu, on déduirait R de cette formule : c'est ainsi que Kirchhoff a procédé à la détermination de l'ohm. Cet exercice pourrait donc être interverti.

16. *Un disque de Faraday tourne autour de son axe d'un mouvement uniforme; la durée de sa révolution est* T *et* S *est sa surface. Le courant produit par cette rotation est lancé dans une bobine dont l'axe coïncide avec l'axe du disque, et dont la résistance est* R. *Déduire de cette expérience la valeur du coefficient d'induction mutuelle de la bobine avec la circonférence du disque.*

Appelons ω la vitesse angulaire du disque et I l'intensité du courant produit dans un champ H; on peut écrire, r étant le rayon du disque,

$$I = \frac{1}{2}\frac{\omega r^2 H}{R} = \frac{SH}{RT},$$

car $S = \pi r^2$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$; on a, par suite,

$$I = \frac{MI}{RT};$$

d'où

$$M = RT.$$

Il n'y a qu'à mesurer la résistance R et la durée T de la révolution du disque : c'est par une méthode analogue que M. Lorenz a déterminé R en fonction de M, cette dernière grandeur étant alors obtenue par le calcul.

17. *Un cadre mobile tourne autour d'un axe situé dans le méridien, faisant avec l'horizontale un angle* β *égal à* 45° : *un galvanomètre, dont la durée de l'oscillation libre est* t *et dans lequel un courant continu de* 100 *milli-ampères donne une déviation* α, *marque une impulsion balistique* δ, *quand on retourne brusquement le cadre sur lui-même, en le faisant tourner de* 180°; *la résistance de ce cadre est* R *et la surface totale de ses spires est* S. *On demande de déduire de cette expérience la valeur de l'intensité horizontale* H *du magnétisme terrestre, sachant que l'inclinaison est égale à* i, *au lieu où l'observation a été faite.*

Soient H et V les composantes horizontale et verticale du

champ terrestre : la variation du flux produite par la rotation du cadre est

$$2\,HS\cos\beta + 2\,VS\sin\beta$$
$$= 2\,HS\cos\beta(1 + \operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}i) = HS\sqrt{2}\,(1 + \operatorname{tang}i).$$

La quantité d'électricité induite est dès lors égale à

$$m = \frac{HS\sqrt{2}(1 + \operatorname{tang}i)}{R}.$$

Or nous avons, d'autre part,

$$m = \frac{t}{\pi}\,\frac{\delta}{\alpha}\,I,$$

en appelant I l'intensité du courant continu qui donne la déviation α dans le rhéomètre; mais, d'après les données du problème, I est égal à $\frac{1}{100}$ d'unité C.G.S. d'intensité; il vient donc

$$H = SR\,\frac{t}{\pi}\,\frac{\delta}{\alpha}\,\frac{\sqrt{2}}{100}\,(1 + \operatorname{tang}i).$$

C'est en résolvant cette équation pour R que MM. Weber et Zöllner ont déterminé la valeur de l'ohm.

18. *Une pile constante, de force électromotrice* E *et de résistance intérieure* r, *lance un courant dans les deux branches symétriques d'un galvanomètre différentiel, comprenant dans son double circuit, d'une part, une bobine de self-induction* L, *de l'autre un fil rectiligne, de même résistance* R *que la bobine. La réduction au zéro étant obtenue par un ajustement approprié, on rompt le circuit principal, et le courant induit qui parcourt les deux branches, de manière à doubler son action électromagnétique, provoque une impulsion balistique* δ; *la constante balistique* K *de l'instrument est du reste connue. Calculer, d'après cela, le coefficient* L *de self-induction de la bobine.*

L'intensité du courant dérivé dans chaque branche du gal-

vanomètre est $\frac{ER}{R^2+2Rr}=\frac{E}{R+2r}$; la quantité d'électricité qui correspond à l'extra-courant de rupture est donnée par suite par l'intégrale

$$(7) \qquad m=\frac{E}{R+2r}\int_0^\infty e^{-\frac{2R}{L}t}\,dt=\frac{EL}{(R+2r)2R}.$$

L'étalonnage du galvanomètre balistique nous fournit une seconde expression de m,

$$m=K\delta.$$

Nous en tirons

$$L=\frac{K\delta(R+2r)2R}{E}.$$

CHAPITRE VI.

GÉNÉRATEURS ET TRANSFORMATEURS D'ÉLECTRICITÉ.

Le mouvement relatif d'un conducteur fermé dans un champ magnétique donne lieu à la production d'une force électromotrice d'induction, qui est le prix d'une dépense équivalente d'énergie mécanique. La multiplicité des dispositifs que l'on peut employer pour réaliser cet effet donne lieu à une grande variété de types de machines : elles sont *magnéto* ou *dynamo-électriques,* suivant la nature de l'inducteur; à *courants continus, alternatifs, ondulatoires* ou *redressés,* suivant la forme de l'induit et de ses accessoires, à *excitation séparée* ou *auto-excitatrices, série, shunt* ou *compound,* suivant le mode employé pour créer et conserver le champ, etc.

Les machines d'induction électrostatique, électrophore de Volta, machines de Bertsch, Carré, Holtz, Tœpler, Voss, Wimshurst, etc., sont analogues en tout point aux machines magnétos; la machine de Carré est à excitation séparée, celle de Holtz est auto-excitatrice, puisque les inducteurs se surexcitent eux-mêmes en partant d'une charge initiale résiduelle; elles sont réversibles comme elles. Bref, elles rentrent dans la même classification.

Quel que soit le mode d'induction, la force électromotrice induite est toujours donnée par la formule $E = Hlv$, H étant l'intensité du champ dans lequel se meut le conducteur de longueur l avec une vitesse v. Si les trois directions considérées ne sont pas rectangulaires, on prendra pour H la composante normale au conducteur et l'on projettera la vitesse v sur le plan de Hv; enfin on fera l'intégration des forces élec-

tromotrices élémentaires, pour les divers éléments du conducteur, si les quantités H, l et v sont variables ([1]).

La réaction mécanique f entre le conducteur mobile et le champ est égale à

$$f = \mathrm{H}l\mathrm{I},$$

I étant l'intensité du courant qui traverse le conducteur; on a donc

$$fv = \mathrm{H}l\mathrm{I}v = \mathrm{EI}.$$

fv est le travail mécanique, EI est le travail électrique dans l'unité de temps.

La force électromotrice d'induction peut être considérée à un autre point de vue, car on a

$$\mathrm{E} = \frac{d\mathrm{Q}}{dt},$$

Q étant le flux de force; nous retrouvons la formule $\mathcal{E} = \mathrm{I}(\mathrm{Q}_2 - \mathrm{Q}_1)$ démontrée précédemment. On exprime le même principe en disant que la force électromotrice est égale à la variation du flux de force ou bien qu'elle est proportionnelle au nombre de lignes de forces coupées dans l'unité de temps ([2]).

$$\mathrm{E} = n\mathrm{HS},$$

n étant le nombre de tours du cadre par seconde, S sa surface et H la composante du champ parallèle à l'axe.

On peut encore exprimer E en fonction de la vitesse et de l'intensité du courant:

$$\mathrm{E} = n\varphi(\mathrm{I}),$$

([1]) Quand l et v sont exprimés en centimètres et H en unités C.G.S., E est donné en unités électromagnétiques C.G.S. que l'on réduit en volts en les multipliant par 10^{-8}; si l'intensité du champ était exprimée en gauss, E serait obtenu en volts. Le gauss est égal à 10^8 unités C.G.S., c'est l'unité pratique d'intensité du champ.

([2]) C'est pour augmenter la variation du flux que les constructeurs cherchent à faire déplacer les induits normalement au plan passant par leur direction et par celle des lignes de force, le fil étant normal à ces lignes.

n étant le nombre de tours par seconde et $\varphi(\mathrm{I})$ une fonction de l'intensité du courant, dont la forme dépend du mode de construction de la machine et de son jeu. Cette fonction est la *fonction caractéristique* de M. Marcel Deprez : on a

$$\varphi(\mathrm{I}) = \frac{\mathrm{E}}{n} = \frac{\mathrm{I}(\mathrm{R}+x)}{n},$$

I étant l'intensité du courant produit dans un circuit de résistance $(\mathrm{R}+x)$.

La courbe qui représente la fonction $\varphi(\mathrm{I})$ est dite la *caractéristique :* les E sont portés en ordonnée et les I en abscisse. La caractéristique d'une machine magnéto est l'analogue du diagramme d'une machine à vapeur et elle rend les mêmes services : elle supplée aux expressions analytiques simples que la Science pure n'a encore pu découvrir pour représenter les phénomènes dont ces machines sont le siège. Les caractéristiques méritent toute l'attention des physiciens : elles permettent de déterminer à tout moment la force électromotrice de la machine par sa vitesse et l'intensité du courant produit; on en déduit encore le taux de son débit électrique en watts.

Le rendement des générateurs doit être défini, parce que ce mot a été pris dans des acceptions fort diverses, qui ont produit de nombreuses et regrettables confusions.

Appelons P_m la puissance mécanique dépensée à faire mouvoir la machine électrique; soit P_e la puissance électrique produite et P_{ed} la puissance électrique disponible, qu'on peut utiliser entre les bornes du générateur : le *rendement théorique* est $\frac{\mathrm{P}_e}{\mathrm{P}_m}$; le *rendement électrique* est $\frac{\mathrm{P}_{ed}}{\mathrm{P}_e}$; le *rendement industriel*, le seul qui intéresse les praticiens, est enfin égal à $\frac{\mathrm{P}_{ed}}{\mathrm{P}_m}$ [1].

Dans les expériences de transmission de force motrice, le

(1) Les résultats donnés ci-après d'expériences faites sur une machine de Gramme contribueront à définir mieux encore ces divers rendements : nous y renvoyons le lecteur.



rendement industriel est le rapport de la puissance mécanique dépensée au point de départ sur l'arbre de la génératrice à la puissance disponible au point d'arrivée sur l'arbre de la réceptrice.

On appelle *moteur électrique* tout appareil capable de transformer l'énergie électrique en travail mécanique : les générateurs que nous venons d'étudier peuvent devenir des moteurs, parce qu'ils sont réversibles; ils se mettront en mouvement dès qu'un courant, fourni par une source, traversera leur induit, en développant une force contre-électromotrice, qui viendra en décompte de celle de la source.

Le travail utile d'un moteur est maximum, lorsque sa force contre-électromotrice est égale à la moitié de la force électromotrice de la source, ou encore lorsque l'intensité du courant existant, tandis que le moteur tourne, est la moitié de ce qu'était cette intensité, alors que le moteur était au repos (loi de Jacobi).

Le rendement électrique d'une transmission de force ainsi réalisée est égal au rapport de la force contre-électromotrice de la réceptrice e à la force électromotrice E de la génératrice. Ce rendement peut devenir égal à 1, lorsque $e = E$, mais alors le travail transmis tombe à zéro (loi de Siemens).

On a souvent intérêt à modifier les éléments d'un courant pour mieux l'utiliser; par exemple, les hauts potentiels, nécessités par la transmission à distance, sont le plus souvent inadmissibles dans la pratique; on diminuera donc avantageusement la tension pour augmenter la quantité. On aura évidemment

$$EI = K.E'I'.$$

K est le coefficient de transformation : il varie de 0,85 à 0,95.

Un transformateur est un appareil d'induction analogue à la bobine de Ruhmkorff : le circuit inducteur est fourni par une machine à courants alternatifs; c'est généralement un courant de haute tension et de faible intensité. A cet égard, l'objectif des transformateurs est l'inverse de celui des bobines d'induction.

Données expérimentales relatives aux générateurs mécaniques d'électricité.

Machine Gramme (série dynamo).

Type : 135 volts, 25 ampères, 1750 tours.

Résistance à froid .... 1,083 ohm { Inducteurs .... 0,634 ohm ; Induit .... 0,449 ohm }

Résistance à chaud .... 1,136 ohm

		Résistance (ohms)		Puissance (kgms)			Rendement		
E (volts).	I (ampères).	extérieure	totale.	P_m.	$P_e = \frac{(E+IR)I}{9,81}$.	$P_{ed} = \frac{EI}{9,81}$.	$\frac{P_{ed}}{P_m}$.	$\frac{P_{ed}}{P_e}$.	$\frac{P_e}{P_m}$.
50,00	4,16	12,01	13,15	52,80	22,80	20,80	0,394	0,912	0,431
87,50	8,57	10,30	11,34	113,35	83,35	75,00	0,661	0,900	0,735
120,00	14,56	8,19	9,33	224,18	194,28	169,92	0,758	0,875	0,866
129,00	18,01	7,16	8,30	298,42	268,42	232,20	0,778	0,865	0,832
102,00	51,01	2,00	3,14	846,00	816,00	520,20	0,615	0,638	0,964

Machine Victoria (*dynamo-compound*) (*type Brush*).

Type : 110 volts, 70 ampères, 750 tours.

Force électromotrice totale	113,3	volts.
Force électromotrice entre les bornes	110,0	
Courant dans l'induit	113,2	ampères.
Courant dans les inducteurs en série	110,0	
Courant dans les inducteurs en dérivation	3,2	
Puissance dépensée dans l'induit	319,3	watts.
Puissance dépensée dans les inducteurs en série	53,8	
Puissance dépensée dans les inducteurs en dérivation	355,6	
Puissance totale dépensée (P_m)	13297,0	
Puissance électrique totale produite (P_e)	12828,7	
Puissance électrique disponible (P_{ed})	12100,0	
Rendement théorique $\frac{P_e}{P_m}$	0,965	
Rendement électrique $\frac{P_{ed}}{P_e}$	0,95	
Rendement industriel $\frac{P_{ed}}{P_m}$	0,91	

Transformateurs.

Gaulard et Gibbs (Ferraris) (en tension).

Coefficient d'induction mutuelle	M = 312 kms.
Coefficient de self-induction de l'induit	L = 312 kms.

268 courants alternés à la seconde.

Zipernowski, Dery et Blathy (en dérivation).

Coefficient d'induction mutuelle	M = 2250 kms.
Coefficient de self-induction des induits	L = 1170 kms.

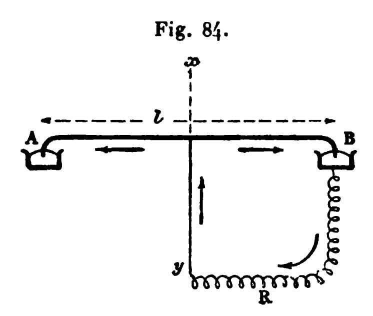
100 courants alternés à la seconde.

APPLICATIONS.

1. *Un conducteur rectiligne* AB (*fig.* 84) *de longueur* $l = 50^{cm}$ *est mobile autour de son axe vertical* xy, *et il tourne*

à la vitesse de 50 *tours à la seconde; ses extrémités plongent dans un bain de mercure qui est relié à l'axe par un fil conjonctif de résistance* R. *On demande de calculer la force électromotrice développée par cette machine magnétodynamique, en un lieu où l'intensité verticale* V *du magnétisme terrestre est égale à* 0,425.

Fig. 84.



La force efficace du champ est sa composante verticale; le flux de force coupé par chaque rayon dans l'unité de temps est $n\pi\frac{l^2}{4}V$; les deux bras donnent, pour n tours, $n\pi\frac{l^2}{2}V$. Soit I l'intensité du courant développé; elle sera $\frac{I}{2}$ dans chaque branche et le travail nécessaire pour entretenir le mouvement s'obtiendra en multipliant $n\pi\frac{l^2}{2}V$ par $\frac{I}{2}$, ce qui donne

$$n\pi\frac{l^2}{2}IV.$$

La force électromotrice est donc $n\pi\frac{l^2}{4}V$.

$$\begin{aligned} E &= 50 \times \pi \times \frac{2500}{4} \times 0,425 \\ &= 41431 \text{ unités C.G.S.} \\ &= 0,41 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

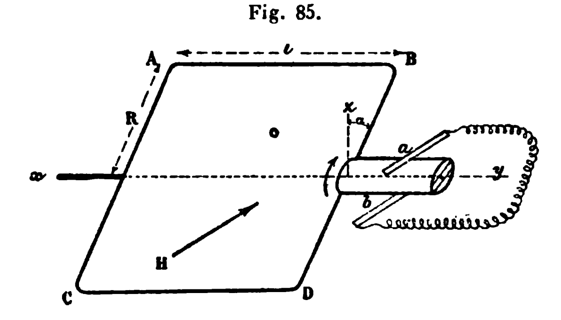
Il faudrait 2500 machines de ce genre pour réaliser la force électromotrice d'un daniell, ou bien il serait nécessaire de

porter la vitesse à $n = \frac{4 \times 10^8}{\pi l^2 V} = 130000$ tours pour qu'une seule machine valût un daniell, ou bien l'on devrait donner à l une valeur de $\sqrt{\frac{4 \times 10^8}{n\pi V}} = 25$ mètres environ.

Ces résultats témoignent de l'impossibilité d'utiliser le champ magnétique terrestre comme inducteur.

2. *Un circuit rectangulaire* ABCD (*fig.* 85) *tourne avec une vitesse de $n = 400$ tours à la seconde, dans un champ uniforme d'intensité* H, *dont la direction est perpendiculaire*

Fig. 85.



à l'axe xy et horizontale. Le rayon R *de rotation est de* 50^{cm}; $l = 150^{cm}$; *enfin* H = 120 *unités* C.G.S. *Quelle est la différence de potentiel entre les deux balais a et b*?

Les côtés AB et CD du rectangle sont seuls efficaces, parce que seuls ils coupent les lignes de force; cherchons d'abord la vitesse v de ces côtés, normalement à la direction de H, et rapportons la position du cadre à la verticale OZ; soit α l'angle du plan ABCD avec OZ.

$$v = 2\pi R n \sin\alpha.$$

Or les forces électromotrices induites dans AB et CD s'ajoutent; nous aurons donc

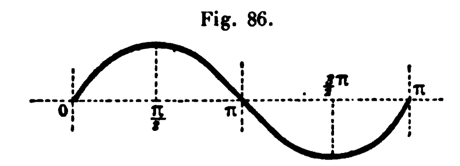
$$E = 2 H l v = 4\pi R l n H \sin\alpha.$$

La force électromotrice est nulle pour $\alpha = 0$; elle croît jusqu'à son maximum $4\pi R l n H$, qu'elle atteint lorsque le cadre est parallèle aux lignes de force; elle décroît ensuite jusqu'à zéro de $\alpha = 180°$ à $0°$; puis elle change de sens pour redevenir nulle quand $\alpha = 360°$. En remarquant que la surface S du cadre est égale à $2Rl$ et que n est égal à l'inverse de la période T, on peut écrire

$$E = 2\pi \frac{SH}{T} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

L'épure de la *fig.* 86 permet de suivre ces variations de la force électromotrice : la machine serait évidemment à cou-

Fig. 86.



rants alternatifs, si elle n'était pourvue d'un commutateur redressant les courants.

La valeur moyenne de la force électromotrice s'obtiendra en intégrant $\int K \sin\alpha\, d\alpha$ entre les limites 0 et π, ce qui conduit à $2K$; d'où

$$E_m = 8\pi R\, l n H = 4\pi \frac{SH}{T}$$
$$= 90{,}58 \times 10^8 \text{ unités C.G.S.} = 90{,}58 \text{ volts.}$$

Si, au lieu d'un seul fil, on en avait eu N, la force électromotrice eût été N fois plus grande : l'armature en navette de Siemens se rapproche le plus des conditions théoriques de ce problème.

3. *Un anneau de Pacinotti ou de Gramme est intercalé avec une bobine étalon et un galvanomètre à oscillations lentes dans un même circuit. La bobine étant couchée à plat sur une table, on la retourne brusquement dans la direction*

est-ouest et l'on note une déviation δ au galvanomètre : une rotation de 180° de l'anneau produit une déviation δ'. Quelle est la surface équivalente S de l'anneau, σ étant celle de la bobine étalon?

Les quantités d'électricité induites dans un même champ sont proportionnelles aux surfaces S et aux sinus de la moitié des angles d'impulsion. Toutefois, il y a une remarque à faire relativement aux bobines élémentaires dont l'anneau est composé : elles tournent toutes de 180°, mais en partant de positions diverses, et l'effet de leur rotation est proportionnel à la valeur moyenne du sinus, entre 0° et 180°. De plus, comme il y a deux séries de bobines entre les balais, le courant n'est que la moitié de ce qu'il serait si toutes les bobines se succédaient en série. La première considération nous conduit, par conséquent, à diviser l'effet par $\frac{2}{\pi}$, valeur moyenne du sinus de 0° à 180°, alors que la seconde nous le fera multiplier par 2.

Il vient donc

$$\frac{S}{\pi\delta'} = \frac{\sigma}{\delta},$$

$$S = \pi\sigma\frac{\delta'}{\delta}.$$

4. *L'angle de calage des balais d'une machine dynamo est égal à α; quel est le rapport des champs magnétiques dus aux électros inducteurs et au courant de l'armature?*

Les électros inducteurs produisent un champ uniforme (on peut l'admettre) dont les lignes de force sont horizontales et les pôles de l'anneau sont situés dans un plan horizontal; les courants induits tendent, au contraire, à placer les pôles sur la verticale de l'axe. Le résultat de cette double action est de tordre les lignes de force dans l'entrefer et de produire une aimantation oblique par rapport à la ligne neutre. Les balais devant opérer la commutation au moment où le flux est maximum sont placés suivant la direction de la diagonale du parallélogramme construit sur les lignes qui représentent ces

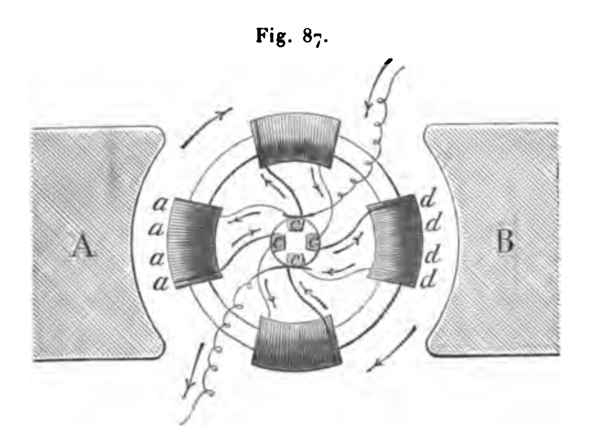
deux forces magnétisantes et le rapport des champs est égal à $\sin\alpha$.

Ce fait a été démontré par M. Sylvanus Thompson.

5. *La valeur moyenne du champ magnétique d'une machine de Gramme étant* H_m (*si on la rapporte à la moitié de l'anneau*), $2n$ *étant le nombre de spires de l'anneau,* l *la longueur de cet anneau,* v *la vitesse de la couche moyenne des fils, on demande de calculer la force électromotrice théorique de la machine.*

Les balais collecteurs divisent les bobines en deux groupes qui se déplacent dans le champ; les forces électromotrices induites dans ces deux groupes sont de sens opposés : on a en réalité deux circuits dérivés, reliés en quantité aux balais c (*fig.* 87), et la force électromotrice totale est égale à la somme

Fig. 87.



des actions élémentaires dans une moitié de l'induit. Mais les différentes bobines sont le siège d'actions variables en grandeur. Chaque fil de chaque spire engendre, dans l'une des moitiés de l'anneau, une force électromotrice dE égale à

$$dE = H l v,$$

H étant l'intensité variable du champ suivant chaque rayon. Par demi-anneau, nous aurons

$$E = \int_0^n dE = vl \int_0^n H.$$

Or on peut poser

$$\frac{1}{n}\int_0^n H = H_m.$$

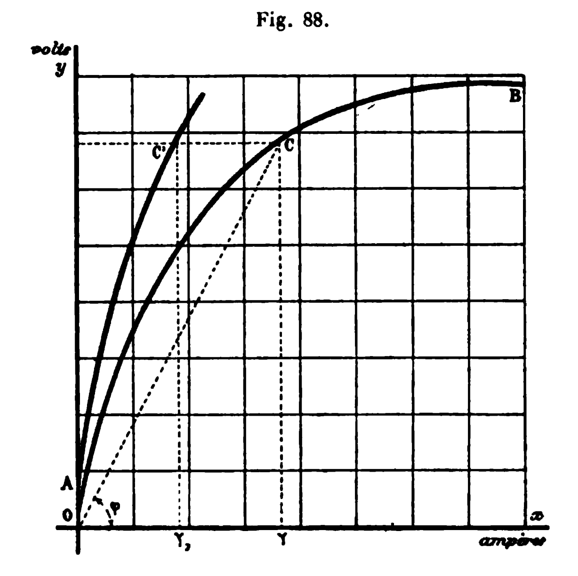
Il vient donc

$$E = nlvH_m.$$

Pour exprimer E en volts, il faut le diviser par 10^8, si H est exprimé en unités C.G.S.

6. *On a construit la caractéristique d'une série dynamo en faisant varier la résistance extérieure* R *et en relevant les valeurs correspondantes des forces électromotrices et des in-*

Fig. 88.



tensités du courant : les premières ayant été portées en ordonnée, les secondes en abscisse, on a obtenu la courbe AB (*fig.* 88). *On demande :*

1° *Quelle est la puissance* $\mathfrak{P}$ *correspondant au point* C?

2° *Quelle est, pour ce même point, la résistance extérieure* R?

On se rappellera d'abord qu'un watt est égal à un volt-ampère, c'est-à-dire à $\frac{1}{736}$ de cheval-vapeur. On trouvera $\mathfrak{P}$ en calculant la valeur de $\frac{EI}{736} = \frac{O\gamma \times C\gamma}{736}$ ampères. On obtient donc la puissance en chevaux en faisant le produit des coordonnées du point et en le divisant par 736.

D'autre part,

$$R = \frac{E}{I} = \frac{C\gamma}{O\gamma} = \tan\varphi.$$

Ainsi la tangente de l'angle formé avec l'axe des x par la droite qui joint l'origine au point considéré donne la résistance R en ce point.

7. *Quelle eût été la force électromotrice au point* C (*fig.* 88), *si l'on avait doublé la vitesse de rotation de l'induit ou le nombre des spires de l'inducteur et de l'induit?*

En augmentant la vitesse, on augmente proportionnellement la force électromotrice, car

$$E = Hlv.$$

La force électromotrice s'obtiendra donc en doublant l'ordonnée $C\gamma$.

Qu'arrivera-t-il si nous doublons l'enroulement de l'inducteur? Le champ doublerait d'intensité, et par suite aussi E, si l'augmentation de résistance ne diminuait pas l'intensité du courant inducteur : or on peut conserver la même intensité en faisant varier convenablement la résistance extérieure. Une augmentation du nombre de spires de l'inducteur équivaut dans ce cas à une augmentation de vitesse, *aliis non mutatis*. Même raisonnement pour l'induit.

Mais supposons que le nouvel enroulement de l'inducteur fasse diminuer réellement l'intensité et que la nouvelle va-



leur I' soit égale à $I\frac{n}{n'}$, n' étant le nombre plus considérable de tours de fil. Le champ sera resté aussi puissant, quoiqu'il y ait moins d'ampères dans le circuit inducteur; nous aurons par suite, pour un enroulement double, une intensité moitié moindre, $O\gamma_1 = \frac{1}{2} O\gamma$, et une force électromotrice $\gamma'_1 C'$ égale à γC. On construira facilement la nouvelle caractéristique en réduisant les abscisses dans le rapport inverse du nombre de tours.

8. *La résistance de l'induit d'une shunt-dynamo est r, celle de l'inducteur r'; R est la résistance extérieure. On demande de trouver le rapport qui existe entre E, la force électromotrice totale, et e, la force électromotrice entre les bornes, au point où le conducteur dérivé est greffé sur le circuit principal.*

Appelons i, i' et I les courants de l'induit, de l'inducteur et du circuit extérieur.

$$i = I + i',$$

$$I = \frac{e}{R}, \qquad i' = \frac{e}{r'};$$

d'où

$$i = e\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r'}\right) = \frac{E}{r + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{r'}}}.$$

En réduisant, nous trouvons

$$\frac{e}{E} = \frac{Rr'}{rr' + Rr + Rr'}.$$

9. *Étudier les conditions pratiques de l'accouplement en batterie de deux dynamos de forces électromotrices E_1 et E_2, de résistances intérieures r_1 et r_2, desservant un circuit de résistance R.*

Les deux forces électromotrices étant inégales, il est à craindre que le courant d'une machine ne pénètre dans la machine la plus faible en sens opposé et n'intervertisse ses

polarités. On évitera cet inconvénient grave en réglant convenablement la résistance R, ainsi que nous allons le démontrer.

Supposons tour à tour qu'une machine seule soit génératrice, l'autre étant conductrice, et calculons les intensités I_1 et I'_1 des courants qui traversent dans ces deux cas la première machine.

Nous aurons d'abord

$$I_1 = \frac{E_2 R}{Rr_1 + Rr_2 + r_1 r_2}.$$

Dans le second cas,

$$I'_1 = \frac{E_1 (R + r_2)}{Rr_1 + Rr_2 + r_1 r_2}.$$

Ces deux courants étant simultanés, le courant ne changera pas de sens tant que l'on aura

$$E_1 (R + r_2) - E_2 R \geqq 0$$

ou

$$\frac{R}{r_2} \geqq \frac{E_1}{E_2 - E_1}.$$

Il n'y aura aucun danger, tant que R satisfera à cette relation, E_2 étant la force électromotrice la plus grande.

10. *M. Ledeboër a déterminé le coefficient de self-induction d'un anneau d'une machine de Gramme; pour un courant de* 20,4 *ampères, il a trouvé pour* L *une valeur de* $0{,}0152 \times 10^9$ *centimètres. Quelle est la perte d'énergie correspondante pour une vitesse de* 1650 *tours par minute?*

Au moment où le balai passe d'une touche à la suivante, le courant s'intervertit dans l'induit et il en résulte une perte d'énergie égale à $\frac{lI^2}{8}$ par bobine élémentaire, l étant le coefficient de self-induction de ces bobines; cet effet se reproduit deux fois par tour pour chacune d'elles. Pour N bobines, nous aurons donc une perte égale à $\frac{2nNlI^2}{8} = \frac{nLI^2}{4}$ par seconde, n étant le nombre de tours par seconde.

Nous aurons donc, pour la perte par seconde,

$$\frac{1650}{60} \times \frac{0,0152 \times 10^9}{4} \times \overline{20,4}^2 \times 10^{-2}$$
$$= 43,5 \times 10^7 \text{ ergs par seconde}$$
$$= 435 \text{ mégergs}$$
$$= 4,75 \text{ kilogrammètres par seconde.}$$

Cette perte est égale à celle que produirait une augmentation nL de résistance de l'armature : elle est augmentée sensiblement par les effets de mutuelle induction des bobines élémentaires.

11. *On veut transmettre* 100 *chevaux à* $0^{km},5$ *de distance : la génératrice dont on dispose a une force électromotrice* E *de* 2000 *volts ; on demande de calculer tous les éléments de la transmission, dans les conditions les plus avantageuses, sachant que la génératrice a* 12 *ohms de résistance* R *et que la réceptrice est identique à la génératrice.*

Il faut transmettre 7500 kilogrammètres par seconde ; or,

$$\mathfrak{T} = \frac{EI}{9,81}$$

et

$$I = \frac{\mathfrak{T} \times 9,81}{E} = \frac{7500 \times 9,81}{2000} = 36,79 \text{ ampères.}$$

L'intensité du courant étant connue, on peut calculer la perte qui se produit dans la génératrice elle-même par échauffement ; elle est égale à $\frac{I^2R}{9,81}$ ou $\frac{\overline{36,79}^2 \times 12}{9,81} = 1654^{kgm}$. Estimons à 1800^{kgm} la perte totale en estimant à 150^{kgm} le déchet dû aux frottements et autres résistances passives. Le travail transmis tombe à 5700^{kgm} : la différence de potentiel e entre les bornes sera donc de

$$\frac{5700 \times 9,81}{I} = 1520 \text{ volts.}$$

La réceptrice absorbera encore 1654^{kgm}, que nous porterons à 1750 [1]; il reste donc 3950^{kgm} disponibles.

Le conducteur produit un nouveau déchet, qu'on peut atténuer, il est vrai, à volonté; mais supposons qu'on emploie un conducteur de fer de 4^{mm} de diamètre, semblable aux fils télégraphiques français.

La résistance de ce fil est de 9 ohms par kilomètre : la perte par échauffement atteint

$$\frac{RI^2}{9,81} = \frac{9 \times 0,5 \times 2 \times \overline{36,79}^2}{9,81} = 1241^{kgm}.$$

Somme toute, il reste $3950 - 1241 = 2709^{kgm}$, soit 36,1 chevaux.

Le rendement est de 36 pour 100.

On l'améliorerait en employant un conducteur de cuivre de 2^{mm} à 3^{mm} de diamètre, mais 1^{km} de ce fil coûterait plus de 1000^{fr}.

12. *On projette de transporter à distance un travail* $\mathfrak{T}_u$, *à travers une résistance* R, *dans laquelle nous supposerons comprises les résistances des machines; la génératrice a une force électromotrice* E, *et la force contre-électromotrice de la réceptrice est égale à* e. *Quelle est la plus grande valeur admissible de* R?

Le travail moteur est $\mathfrak{T}_m = EI$; le travail utile $\mathfrak{T}_u$ égale d'autre part eI, et nous savons que

$$E - e = IR.$$

Résolvons ces équations par rapport à I, e et $\mathfrak{T}_m$; il vient

$$E - \frac{\mathfrak{T}_u}{I} = IR,$$

---

[1] La vitesse de la réceptrice étant moindre que celle de la génératrice, nous ne comptons que 100^{kgm} de résistances passives au lieu de 150.



d'où

$$I = \frac{E \pm \sqrt{E^2 - 4R\mathcal{E}_u}}{2R},$$

$$e = E - IR = \frac{E \mp \sqrt{E^2 - 4R\mathcal{E}_u}}{2}$$

et

$$\frac{\mathcal{E}_u}{\mathcal{E}_m} = \frac{e}{E} = \frac{1 \mp \sqrt{1 - \frac{4R\mathcal{E}_u}{E^2}}}{2}.$$

Pour que I soit réel, il faut que R soit tout au plus égal à $\frac{E^2}{4\mathcal{E}_u}$.

Or la plus grande valeur acceptable de E est de 3000 volts : on calculera donc sans peine la valeur limite de R. Elle est indépendante de la puissance des machines dont on dispose; elle croît avec le carré de la force électromotrice de la génératrice.

Cette solution générale est de M. Maurice Lévy.

13. *Une transmission d'énergie à distance se fait par une génératrice de* 1000 *volts à* 2^{km} *de distance, avec un rendement* ρ *de* 48 *pour* 100; *on veut doubler la distance et conserver le même rendement; quelle devra être la force électromotrice de la génératrice?*

$$\rho = \frac{e}{E},$$

$$\mathcal{E} = EI = \frac{E(E-e)}{R} = \frac{E^2\left(1 - \frac{e}{E}\right)}{R} = \frac{E^2(1-\rho)}{R}.$$

Le travail transmis et le rendement restant constants, il est nécessaire que $\frac{E^2}{R}$ reste constant aussi : donc, R étant devenu 2R, nous aurons

$$\frac{x^2}{2R} = \frac{E^2}{R},$$

$$x = E\sqrt{2} = 1000 \times 1{,}414 = 1414 \text{ volts}.$$

LIVRE IV.

LUMIÈRE ET SON.

CHAPITRE I.

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE.

La quantité de lumière reçue sur une surface plane, sous un angle d'incidence α, est proportionnelle au cosinus de cet angle et en raison inverse du carré de la distance de la surface à la source. Pour des foyers d'intensités différentes, on peut arriver à produire un même éclairement, soit en faisant varier la distance, soit en faisant varier l'angle α. C'est par l'un ou l'autre de ces procédés que l'on effectue les mesures photométriques par comparaison avec des étalons de lumière.

Un rayon réfléchi reste dans le plan d'incidence en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence; un rayon réfracté reste de même dans le plan d'incidence, mais l'angle de réfraction diffère de l'angle d'incidence; le rapport des sinus de ces angles est constant pour un même milieu et égal à l'indice de réfraction n de ce milieu. La réflexion peut être considérée comme une réfraction à l'entrée d'un milieu d'indice -1.

On appelle *miroir aplanétique* un miroir qui fait concourir en un même point les rayons émanés d'un même point : tels sont les miroirs plans. Un miroir sphérique ne jouit de cette propriété que pour un point lumineux placé en son centre;

un miroir, dont la surface est engendrée par la rotation d'une ellipse autour de son axe focal, n'est aplanétique que pour ses foyers et un paraboloïde de révolution, pour des rayons parallèles à son axe.

Les miroirs sphériques sont considérés comme aplanétiques, quand ils ont une faible ouverture. Leur formule générale est

$$(1) \qquad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f};$$

p est la distance de l'objet au miroir, p' la distance de son image, ces grandeurs étant positives si l'objet ou l'image est réel, c'est-à-dire placé en avant du miroir; elles seront négatives s'ils sont virtuels, c'est-à-dire s'ils se trouvent en arrière du miroir; f est la moitié du rayon R de la sphère : on l'appelle la distance focale du miroir. Grâce à cette convention, une même formule convient aux miroirs concaves et convexes; en effet, dans ce dernier cas, on aurait $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = -\frac{1}{f}$; mais f est négatif, puisque le centre de courbure est en arrière, et l'on a, comme ci-dessus,

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$$ [1].

Le rapport des dimensions linéaires de l'image et de l'objet est égal à $\frac{p'}{p}$, en valeur absolue;

$$(2) \qquad \frac{I}{O} = \frac{p'}{p};$$

si $\frac{p'}{p}$ est positif, l'image est renversée, sinon elle serait droite.

---

(1) Bien qu'une seule et même formule soit applicable aux miroirs concaves et convexes, on n'oubliera pas, dans les calculs, de faire f négatif dans les miroirs convexes : c'est la convention qui a conduit à cette formule.

Le miroir plan est un miroir sphérique de rayon infini : on a donc

$$p = -p' \qquad \text{et} \qquad \frac{I}{O} = -1.$$

L'image est symétrique, droite et égale à l'objet [1].

Quand un rayon traverse un milieu réfringent limité par des faces planes parallèles, il n'est pas dévié, mais il subit un déplacement x, donné par l'équation

$$(3) \qquad x = e \sin i \left(1 - \frac{\sqrt{1 - \sin^2 i}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right),$$

dans laquelle e est l'épaisseur de la lame, i l'angle d'incidence et n l'indice de réfraction du milieu. L'ophtalmomètre de Helmholtz est basé sur l'observation de ce déplacement.

Si le milieu diaphane est terminé par des faces planes formant un angle A, on obtient un prisme donnant une déviation δ égale à

$$(4) \qquad \delta = i + i' - A.$$

Cette déviation est minimum lorsque $i = i'$; alors $A = 2r$, et l'indice n peut se déduire de la connaissance de A et de δ :

$$(5) \qquad n = \frac{\sin \frac{A + \delta}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$

C'est ainsi qu'on mesure les indices de réfraction des substances réfringentes. Wollaston et Abbe ont aussi utilisé des phénomènes de réflexion totale, et leurs appareils sont devenus classiques.

Le milieu réfringent peut être limité par une surface sphérique : soient n_1 et n_2 les indices de ce milieu et de la

---

(1) En rapportant les positions des foyers conjugués au foyer principal, on obtient la formule de Newton

$$\pi\pi' = f^2.$$



substance qui le baigne. Convenons de désigner par p_1 la distance du point-objet à la surface, par p_2 la distance du point-image; prenons ces quantités positives, lorsque le point considéré se trouve en avant, par rapport à la marche des rayons incidents, négatives lorsqu'il est en arrière. On démontre sans peine que

$$\frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_1 - n_2}{R}. \tag{6}$$

Une double surface sphérique constitue une lentille : supposons d'abord que cette lentille ait une épaisseur négligeable; nous savons que, pour une lentille convergente,

$$\frac{f_2}{p'} + \frac{f_1}{p} = 1. \tag{7}$$

Si nous désignons par f_2 et f_1 les deux distances focales,

$$\frac{I}{O} = \frac{f_1}{f_2}\frac{p'}{p}. \tag{8}$$

Comme ci-dessus, p et p' sont positifs quand l'objet ou l'image est réel, négatifs quand il est virtuel; $\frac{I}{O}$ est positif quand l'image est droite.

Ces conventions offrent un grand avantage, attendu qu'une même formule convient aux lentilles convergentes et divergentes : l'équation $\frac{f_2}{p'} + \frac{f_1}{p} = 1$ présente donc la plus grande généralité.

Si $f_1 = f_2 = f$, nous retrouvons la formule simplifiée des cours élémentaires

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f}; \tag{9}$$

elle convient aux lentilles placées dans l'air.

Il reste à calculer les valeurs des distances focales : on trouve

$$\frac{1}{f_1} = \left(\frac{n_1 - \nu}{R} + \frac{\nu - n_2}{R'}\right)\frac{1}{n_1},$$

ν étant l'indice du corps réfringent, n_1 et n_2 l'indice des substances qui baignent les faces, R et R′ les rayons des deux sphères; de même,

$$\frac{1}{f_2} = \left(\frac{n_1 - \nu}{R} + \frac{\nu - n_2}{R'}\right)\frac{1}{n_2}.$$

On voit que, si $n_1 = n_2$, $f_1 = f_2$, et nous retrouvons une formule connue

$$\frac{1}{f} = \frac{1 - \frac{\nu}{n_1}}{R} + \frac{\frac{\nu}{n_1} - 1}{R'} = (n - 1)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right),$$

n étant l'indice $\frac{\nu}{n_1}$ relatif du corps réfringent au milieu ambiant.

Mais on ne peut pas toujours négliger l'épaisseur des lentilles.

La théorie des lentilles épaisses est due à Gauss.

Il y a à considérer dans une lentille 10 *éléments cardinaux*, à savoir :

Quatre plans, perpendiculaires à l'axe principal, appelés les *plans principaux* et les *plans focaux*.

Six points, deux *points principaux*, deux *points focaux* et deux *points nodaux*.

Les plans focaux sont les lieux des points où se croisent les rayons incidents qui émergent parallèlement à l'axe.

Les plans principaux jouissent de la propriété d'être rencontrés à la même distance et du même côté de l'axe par les rayons incident et émergent. Leur intersection avec l'axe donne les points principaux. Les points principaux sont l'image l'un de l'autre.

Quand on prend les points principaux pour origine des distances, on est conduit à une équation $\frac{f_2}{p'} + \frac{f}{p} = 1$, identique à l'équation (7) et l'on retrouve l'équation (8).

Les points nodaux sont deux points singuliers qui jouent un rôle analogue au centre de courbure des miroirs et au centre optique des lentilles minces; à tout rayon dirigé vers

un point nodal correspond un rayon émergent, parallèle au premier, passant par le second point nodal.

Les points nodaux sont distincts des points principaux, lorsque le milieu qui baigne la face postérieure de la lentille n'a pas la même réfringence que celui d'où partent les rayons incidents; mais, quand les milieux sont identiques, ces points sont confondus.

Les éléments cardinaux des lentilles permettent de construire très simplement les rayons lumineux réfractés par les lentilles; on détermine du reste leur position par les relations suivantes, dans le cas où les milieux extrêmes sont les mêmes. La distance focale étant comptée à partir du point principal correspondant, on trouve la relation

$$(10) \qquad \frac{1}{f} = (n-1)\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} - \frac{(n-1)e}{nRR'}\right],$$

dans laquelle e représente l'épaisseur de la lentille : cette même relation peut s'écrire sous la forme

$$(11) \qquad f = \frac{nRR'}{(n-1)[n(R+R')-e(n-1)]}.$$

Soit a_1 la distance du premier point nodal ou principal à la première face de la lentille : nous aurons

$$(12) \qquad a_1 = \frac{eR}{n(R+R')-e(n-1)}.$$

De même

$$(13) \qquad a_2 = \frac{eR'}{n(R+R')-e(n-1)}.$$

Leur distance mutuelle est

$$(14) \qquad \frac{e(n-1)(R+R'-e)}{n(R+R')-e(n-1)}.$$

Ces formules sont relatives à des lentilles biconvexes.

On étend sans peine ces équations à des systèmes de lentilles, que l'on peut toujours remplacer par une lentille équi-

valente. Pour les lentilles minces, la relation est très simple : *Un système de plusieurs lentilles centrées et voisines est équivalent à une lentille unique, dont la convergence* $\frac{1}{F}$ *serait égale à la somme algébrique* $\Sigma \frac{1}{f}$ *des convergences des lentilles qui composent le système.*

Cette règle est précieuse pour l'achromatisation des systèmes, qu'on réalise en accouplant deux lentilles de convergence positive et négative, taillées dans des verres inégalement dispersifs. On mesure au diasporamètre les coefficients de dispersion $n_v - n_R$; la condition d'achromatisme du système est dès lors exprimée par l'équation

$$(15) \qquad \frac{n'_v - n'_R}{n_v - n_R} = \frac{\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}}{\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}}.$$

On se donne généralement R et R' et l'on calcule R''.

CONSTANTES NUMÉRIQUES.

Unités photométriques.

Unités.	Substance.	Dimensions.	Consommation par heure.	Équivalences. Carcel.	Équivalences. Violle.
			gr		
Carcel......	Huile de colza.	Bec 23mm, flamme de 40.........	42	1	0,48
Candle......	Spermacéti...	Bougie de 6 à la livre.........	7,78	0,128	0,058
Bougie française.....	Stéarine.....	Étoile, 5 au paquet.........	»	0,133	0,064
Bougie allemande....	Paraffine.....	Bougie de 20mm de diam......	»	0,135	0,065
Violle.......	Platine en fusion.......	Par cent. carré.	»	2,08	1

Dans un bec Argand, à cheminée, type Bengel, on obtient un pouvoir éclairant de 1 carcel par la combustion de 105lit de gaz d'éclairage, sous la pression de 3mm à 4mm d'eau, la pression de l'atmosphère étant égale à 760mm.

INDICES DE RÉFRACTION.

Solides.

Baume du Canada.	1,532	Phosphore........	2,224
Sucre candi......	1,535	Diamant..........	2,414
Glace (HO).......	1,310	Sel gemme.......	1,545
		Alun.............	1,457

Verres.

Radiations.	Crown dur.	Flint léger.	Flint lourd.
A................	1,5117	1,5600	1,6100
B................	1,5136	1,5686	1,6157
C................	1,5146	1,5700	1,6175
D................	1,5172	1,5740	1,6224
E................	1,5203	1,5792	1,6288
F................	1,5231	1,5839	1,6347
G................	1,5383	1,5922	1,6461
H................	1,5328	1,6007	1,6563

Liquides.

Acide phénique...	1,549	Chloroforme......	1,449
Alcool absolu.....	1,366	Éther............	1,359
Alcool méthylique.	1,330	Huile d'olive......	1,470
Sulfure de carbone.	1,644	Huile de cassia...	1,631
Benzine..........	1,413	Glycérine........	1,468
Eau à 0°.........	1,333	Térébenthine.....	1,478

Gaz.

Vide........................	1
Hydrogène..................	1,0001387
Oxygène....................	1,002706
Air.........................	1,000293
Oxyde de carbone.....	1,000335

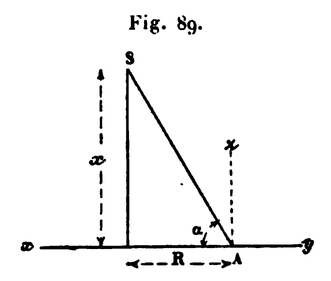
APPLICATIONS.

1. *Un lecteur dispose son livre à* $0^m,25$ *du pied de sa lampe; à quelle hauteur x doit-il placer la source de lumière pour qu'il bénéficie du maximum d'éclairement?* (*fig.* 89).

Soit x la hauteur cherchée, a la distance SA et R le rayon du cercle d'éclairement maximum :

$$x = \sqrt{a^2 - R^2}.$$

Fig. 89.



La quantité de lumière reçue sur la page du livre en A, par unité de surface, est proportionnelle à

$$\frac{\cos ZAS}{\overline{AS}^2} = \frac{\sin\alpha}{a^2} = \frac{x}{a^3}.$$

Elle passe par un maximum, attendu qu'elle est nulle pour $\alpha = 0$ et pour $a = \infty$. Cherchons donc le maximum de la fonction

$$\frac{x}{a^3} = \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{a^3}.$$

Or la valeur de x qui rendra cette valeur maximum est la même que celle qui rendra maximum la fonction

$$\frac{a^2 - R^2}{a^6} = \frac{1}{a^4} - \frac{R^2}{a^6} = a^{-4} - R^2 a^{-6}.$$

Égalons à zéro la dérivée de cette fonction : il vient

$$-4a^{-5} + 6R^2 a^{-7} = 0$$

ou

$$2a^2 - 3R^2 = 0;$$

d'où

$$a = R\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Par suite,

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}} = R \times 0,707 = 0,25 \times 0,707 = 0^{m},178.$$

2. *On se propose d'établir au sommet de la tour Eiffel, à* 300^{m} *de hauteur, un puissant foyer de lumière; quel est le rayon x du cercle d'éclairement maximum?*

$$x = \frac{h}{0,707} = \frac{300}{0,707} = 424^{m}.$$

3. *Calculer l'intensité moyenne sphérique d'un foyer lumineux.*

L'intensité moyenne sphérique est la quantité de lumière que recevrait normalement l'unité de surface d'une sphère de rayon 1, ayant le foyer pour centre, en admettant que la quantité totale de lumière émise soit répartie uniformément.

On sait que cette répartition n'a lieu exactement pour aucun foyer; une lampe à huile n'émet, dans une direction inclinée de 50° sous l'horizon, que $\frac{1}{5}$ de ce qu'elle donne dans le plan horizontal; l'intensité maximum A d'une lampe électrique à courants continus, dont le charbon positif est en haut, correspond à un angle de 50° avec le plan horizontal (*fig.* 90), d'après M. Fontaine; une lampe à courants alternatifs donne une répartition plus égale, marquée par la courbe *a* de la même figure.

Or on demande l'intensité sphérique moyenne de la courbe A.

On la détermine graphiquement par le procédé de la *fig.* 91, en menant les rayons vecteurs S1, S2, S3, S4, ..., et en projetant leurs extrémités en I, II, III, IV, ..., puis en prenant I1′, II2′, III3′, ..., égaux à S1, S2, S3, ... L'intensité moyenne sphérique est représentée par le quotient de la surface A1′2′3′4′, ..., B par la base AB.

En effet, représentons par I_θ l'intensité d'un rayon envoyé

Fig. 90.

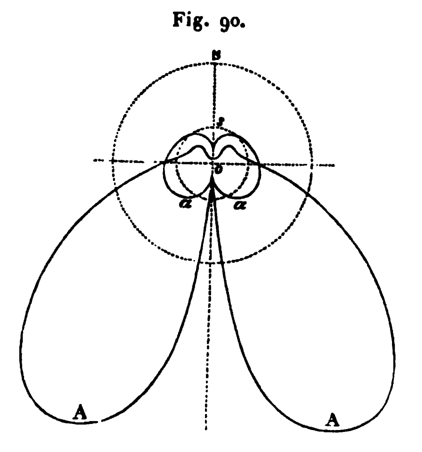
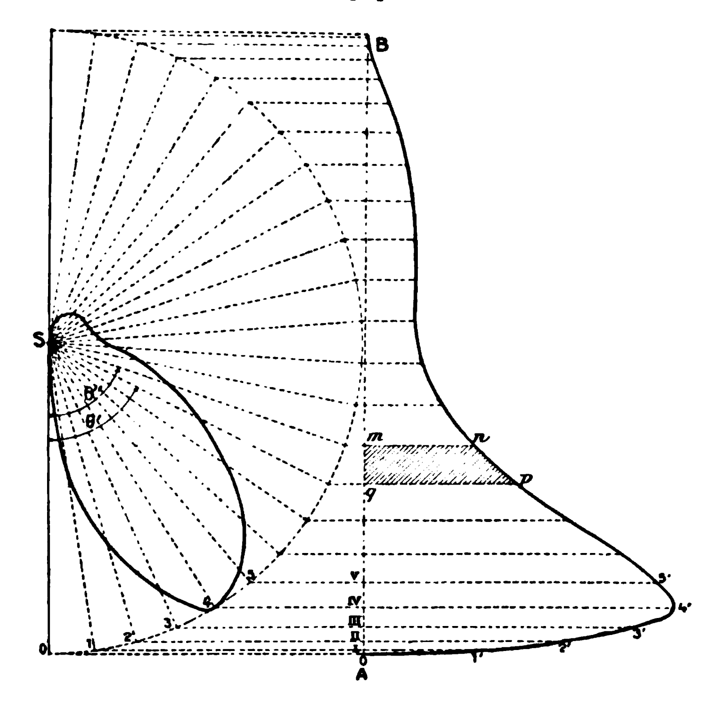


Fig. 91.



dans une direction θ : soient deux rayons infiniment voisins déterminés par les angles θ et $(\theta + d\theta)$; la hauteur de la zone limitée par ces directions est $\cos\theta\, d\theta$, sa surface $2\pi \cos\theta\, d\theta$. Elle reçoit donc une quantité de lumière $I_\theta 2\pi \cos\theta\, d\theta$. Intégrons entre les limites θ' et θ''; cette zone reçoit une quantité

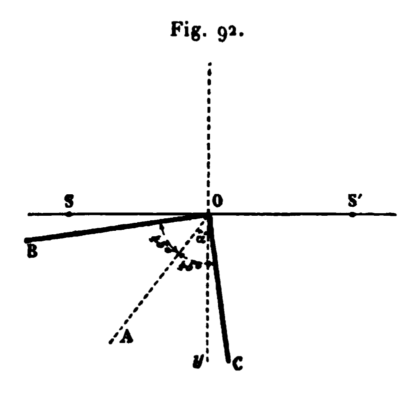
$$\int_{\theta'}^{\theta''} I_\theta 2\pi \cos\theta\, d\theta = \text{surface } mnpq.$$

La surface totale du diagramme représente donc la somme des radiations émises dans toutes les directions, et l'on obtient évidemment la moyenne en divisant cette surface par AB.

La surface se mesurera par la formule de Simpson, ou bien au planimètre d'Amsler.

4. *Entre deux foyers* S *et* S′ (*fig.* 92), *on dispose, à égale distance de chacun d'eux, des plaques rectangulaires* OC *et*

Fig. 92.



OB *de verre opale dépoli, dont la bissectrice* OA *fait un angle* α *avec la normale* Oy *à* SS′ : *or ces deux lames se trouvent éclairées de même dans ces conditions. Calculer, d'après cela, leur intensité relative.*

$$Q = \frac{S\cos(45 - \alpha)}{d^2} = \frac{S'\cos(45 + \alpha)}{d'^2}.$$

Mais $d = d'$; donc

$$\frac{S}{S'} = \frac{\cos(45 + \alpha)}{\cos(45 - \alpha)} = \frac{1 - \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}\alpha}.$$

C'est le procédé de M. Arnoux.

5. *Le phare de Dunkerque a un éclat de* 6500 *carcels : quelle est sa portée, la transparence moyenne a de l'atmosphère de la Manche étant égale à* 0,9?

La portée d'une lumière est définie par cette condition, que son intensité minimum perceptible est égale à $\frac{1}{100}$ de carcel. Nous avons donc

$$\frac{S a^x}{x^2} = 0{,}01.$$

Dans cette formule x est exprimé en kilomètres.

On trouvera par tâtonnement que x est égal à $53^{km},2$.

6. *Calculer le rayon de l'image de la Lune obtenue dans le plan focal d'un miroir de* 120^{cm} *de rayon, sachant que le diamètre apparent de cet astre est d'environ* 30'.

$$\frac{I}{O} = \frac{p'}{p},$$

$$I = \frac{O}{p} p' = \operatorname{tang}\varphi f = \operatorname{tang} 0^\circ 30' \times 120 = 1^{cm},05.$$

7. *Un miroir de Foucault a la forme sphérique; il a* 60^{cm} *de diamètre et* 200^{cm} *de longueur focale f, soit* 400^{cm} *de rayon; quelle est l'épaisseur de la couche de verre qu'il faut enlever par polissage sur les bords de ce miroir pour lui donner la forme parabolique?*

L'équation de la parabole méridienne est

$$y^2 = 4fx.$$

Le cercle osculateur au sommet a son centre sur l'axe de la parabole et son rayon est $2f$: son équation est donc

$$(X - 2f)^2 + Y^2 = 4f^2.$$

Faisons $Y = y$; il vient

$$(X - 2f)^2 = 4f^2 - y^2;$$

d'où

$$x = \frac{y^2}{4f} \qquad \text{et} \qquad X = 2f - \sqrt{4f^2 - y^2}.$$

On en déduira par soustraction

$$\begin{aligned} X - x &= 2f - \sqrt{4f^2 - y^2} - \frac{y^2}{4f} \\ &= \frac{(2f - \sqrt{4f^2 - y^2})^2}{4f} \\ &= f\left(1 - \sqrt{1 - \frac{y^2}{4f^2}}\right)^2 \\ &= \frac{y^4}{64 f^3}, \end{aligned}$$

en négligeant dans le développement de la racine carrée les puissances supérieures à la première.

Mais $y = 30^{cm}$ et $f = 200^{cm}$; d'où

$$X - x = \frac{\overline{30}^4}{64 \times \overline{200}^3} = 0^{cm},0016.$$

Il y a donc moins de $\frac{1}{61}$ de millimètre de matière à enlever. Nous empruntons ce calcul à M. Pellat.

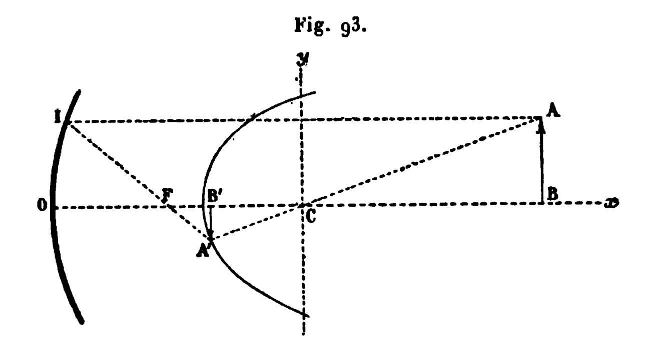
8. *Une flèche lumineuse* AB *est placée devant un miroir concave, de longueur focale f, et elle est disposée perpendiculairement à son axe principal à une distance* $OB = 2f + a = 4f$. *Trouver le lieu des foyers conjugués des divers points de cette droite* (*fig.* 93).

A′ est le foyer conjugué de A, et l'on a, par suite,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f},$$

p étant égal à AI et p' à A′I. Posons $CB' = x$, $A'B' = y$,

Fig. 93.



$AB = h$; il en résulte, en prenant C pour origine des coordonnées, et Cx et Cy pour axes,

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2} + 2f} + \frac{1}{2f - \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{f}.$$

Mais, d'autre part,

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{h}.$$

Il vient, finalement, en éliminant h,

$$\frac{x}{a\sqrt{x^2 + y^2} + 2fx} + \frac{1}{2f - \sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{1}{f}$$

ou

$$f\left(1 - \frac{x}{a}\right) = \sqrt{x^2 + y^2} = f\left(1 - \frac{x}{2f}\right),$$

$$\tfrac{3}{4}x^2 + y^2 + x - f^2 = 0.$$

Nous aurons une relation semblable pour tout autre point de la flèche AB; le lieu des points A′ est donc une courbe du

second degré, dont CA′ est le rayon vecteur, C le foyer et CO l'axe : c'est une ellipse.

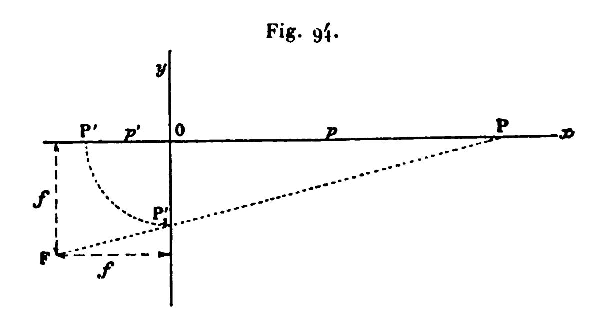
9. *Quel est le point conjugué d'un point* P *par rapport à un miroir convexe, de rayon égal à* 100^{cm}? *On donne* $p = 3f$.

Nous voyons d'abord que

$$f = 50^{cm}.$$

Traçons deux axes rectangulaires et marquons le point F (*fig.* 94), dont les coordonnées sont égales à $-f$; prenons

Fig. 94.



$OP = p$, joignons PF; rabattons P'_1 sur l'axe, en P′ : nous aurons

$$p' = 0,75f = 37^{cm},50.$$

Le calcul donne de même

$$p' = \frac{pf}{p+f} = 0,75f.$$

10. *Construire graphiquement l'image d'un point lumineux situé sur l'axe principal, par application de la formule de Newton.*

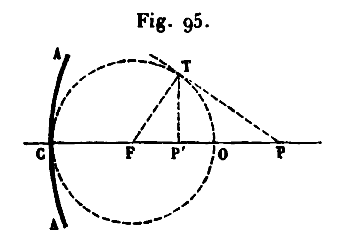
Du foyer F, comme centre, décrivons une circonférence de rayon f; de P menons la tangente PT (*fig.* 95), et projetons

le point T sur l'axe : P' est le point cherché, car on a

$$PF \times P'F' = f^2.$$

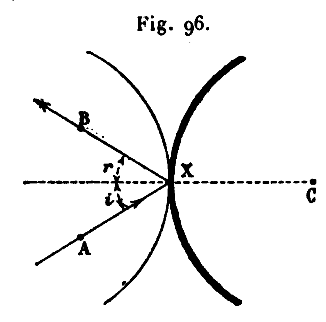
C'est la construction de M. Lebourg.

Fig. 95.



11. *Vers quel point* X *d'un miroir convexe devra-t-on diriger un rayon lumineux* AX' *pour qu'il passe en* B *après réflexion?* (*fig*. 96).

Fig. 96.



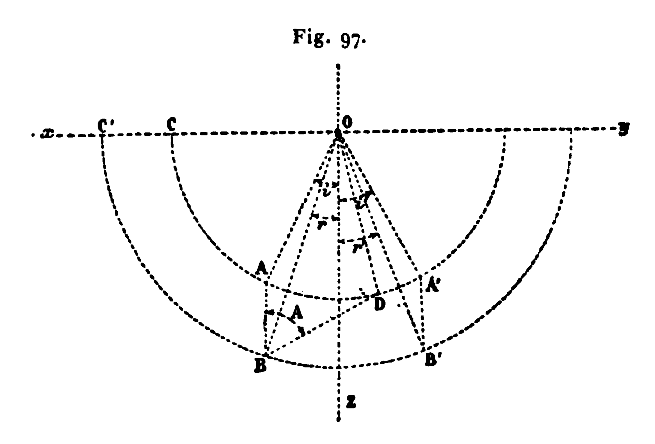
Le point X sera le point de contact de la sphère réfléchissante et d'un ellipsoïde de révolution autour de AB, dont les points A et B sont les foyers.

12. *Tracer, par un procédé graphique, la marche d'un rayon lumineux à travers un prisme d'indice* n, *dont l'angle réfringent est* A.

De O, comme centre, sur la ligne xy, décrivons deux circonférences de rayons $OC = 1$ et $OC' = n$ (*fig*. 97).

Soient OZ la normale à la face d'entrée et OA le rayon incident, faisant avec cette normale l'angle i; conduisons AB parallèle à OZ; BO est le rayon réfracté par la face d'entrée,

Fig. 97.



car $\sin i = n \sin r$. Nous connaissons donc la direction du rayon dans l'intérieur du prisme.

Faisons ABD égal à $A = r + r'$;

$$AOD = \delta = i - r + i' - r'.$$

Le rayon émergent est OD; car, si nous traçons de même OA' et OB', nous obtenons les angles i' et r', et la droite OB, direction du rayon dans l'intérieur du prisme avant l'émergence, peut être transportée en OB; OD est donc bien la direction du rayon émergent, puisque $ABO = r$ et $A'B'O = r'$.

M. Radau a indiqué cette méthode de construction dans les *Annales de Poggendorff*.

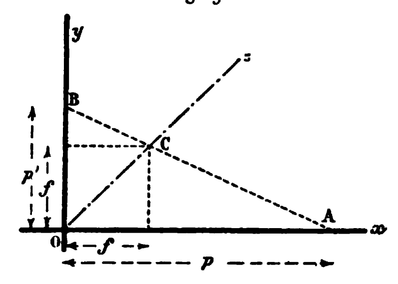
13. *Une lentille a une longueur focale f; déterminer graphiquement la distance d'un point* P', *conjugué de* P, *distant de p de la lentille.*

Sur les axes Ox et Oy, dont Oz est la bissectrice (*fig.* 98), marquons en A le point p; $OA = p$; prenons $OC = f\sqrt{2}$ et joignons AC : nous trouvons ainsi $OB = p'$.

En effet, l'équation de AB est

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{p'} = 1.$$

Fig. 98.



Les coordonnées de C sont égales à f; donc

$$\frac{f}{p} + \frac{f}{p'} = 1,$$

ou

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}.$$

C'est la construction de Lissajous adaptée aux lentilles. M. d'Ocagne a proposé de marquer sur Oz la graduation multipliée par $\sqrt{2}$.

14. *Une lentille de flint, biconvexe, a* 35^{mm} *d'épaisseur; le rayon de courbure de ses deux faces est le même, et il mesure* 0^{m},10. *On demande de calculer les éléments cardinaux de cette lentille et de construire l'image d'une flèche de* 0^{m},025 *de hauteur placée perpendiculairement à l'axe à* 0^{m},08 *en arrière du foyer principal de la lentille. On prendra pour la valeur de l'indice du flint* $n = 1,56$.

Déterminons d'abord la position des points focaux et nodaux :

$$(11) \qquad f = \frac{nR^2}{(n-1)[2nR - e(n-1)]}$$

$$= \frac{0,0156}{0,56(0,292)} = 0^{m},095.$$

La distance a d'un point principal à la face de la lentille correspondante est

$$a = \frac{eR}{2nR - e(n-1)} = \frac{0,056}{0,292} = 0,012 = 12^{mm}.$$

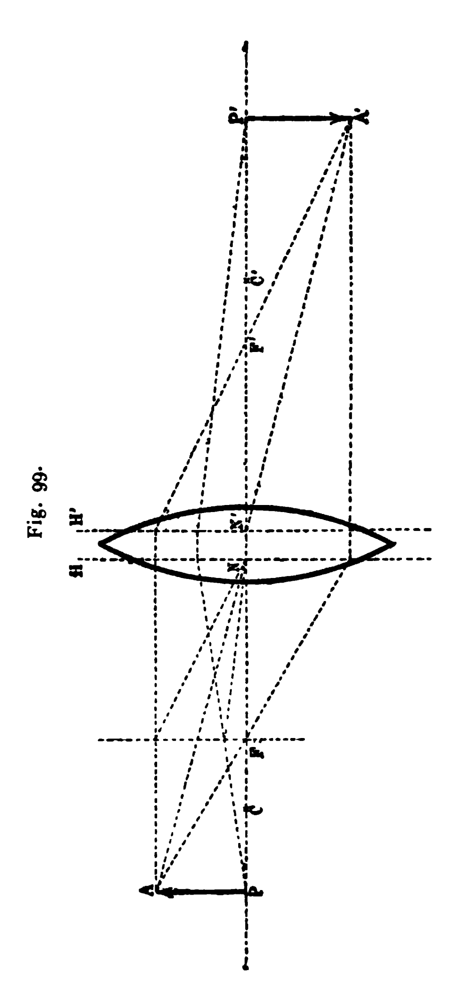


Fig. 99.

L'objet est placé à $0^m,08$ en arrière du foyer, donc à $0^m,175$ du point principal, et nous trouvons p' par l'équation gé-

nérale $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$, rapportée aux points principaux :

$$p' = \frac{pf}{x-f} = \frac{0,175 \times 0,1}{0,08} = 0,219.$$

Enfin

$$\frac{I}{O} = 1,25,$$

$$I = 1,25 \times 0,025 = 0,031 = 31^{mm}.$$

L'épure de la *fig.* 99 permet de suivre les constructions qui conduisent à la solution de ce problème.

15. *On donne deux lentilles convergentes* L *et* L' (*fig.* 100), *dont* R, R', R_1 *et* R'_1 *sont les points principaux;* F *et* F' *sont les foyers principaux de la première,* F_1 *et* F'_1 *ceux de la seconde; les lentilles sont écartées d'une distance* $D = R_1R'_1$. *Rechercher les points principaux de ce système.*

Suivons la marche des rayons SI et S_1I_1; le premier passe en F', le second en F_1, et ils se coupent en K.

Or

$$\frac{I'R'}{KO} = \frac{R'F'}{OF'} = \frac{I_1R_1}{KO} = \frac{R_1F_1}{OF_1}.$$

On en déduit

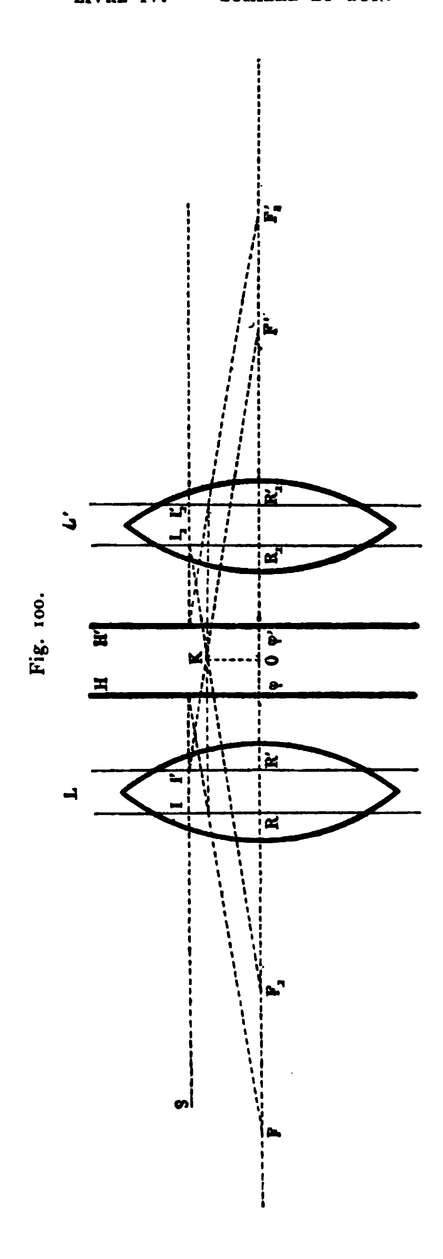
$$\frac{OF_1}{OF'} = \frac{R_1F_1}{R'F'}.$$

Le point O est donc fixe.

Mais KO peut être une ligne lumineuse : l'image K à travers L est H, celle de K à travers L' est H', et les deux plans Hφ et H'φ' sont les deux plans principaux cherchés.

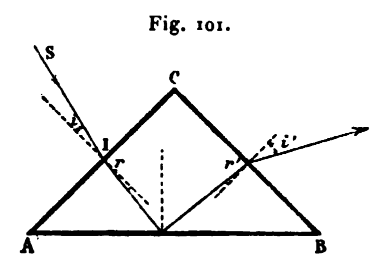
16. *Quel est le prisme dont les images, données par une réflexion sur la face la plus large, ne présentent pas de phénomènes de dispersion?*

Fig. 100.



Admettons que ABC (*fig.* 101) soit le prisme satisfaisant à cette condition; appelons i l'angle d'incidence d'un faisceau

Fig. 101.



parallèle de lumière blanche, i' l'angle d'émergence d'un rayon simple de couleur quelconque, pour laquelle l'indice de réfraction a une valeur n.

On voit sans peine que

$$r + A = r' + B,$$

d'où

$$r' = A - B + r$$

et

$$\sin i' = n \sin(A - B + r).$$

Mais

$$\sin i = n \sin r.$$

Donc

$$\sin i' = \cos(A - B)\sin i + \sin(A - B)\sqrt{n^2 - \sin^2 i}.$$

Pour qu'il n'y ait pas de dispersion, il faut que l'angle i' soit indépendant de n, c'est-à-dire que A soit égal à B.

La condition cherchée est donc que le prisme soit isoscèle : cette propriété, bien connue des constructeurs, est utilisée dans les instruments d'Optique où ces prismes font office de miroirs.

17. *On veut achromatiser une lentille convergente de crown par une lentille biconcave de flint lourd pour les raies* D *et* F : *les rayons* R *et* R′ *de la lentille de crown sont* $1^m,20$ *et* $2^m,50$; *calculer le rayon* R″ *extérieur de la lentille de flint, et dire si le système est convergent ou divergent.*

Nous aurons

$$\frac{n'_F - n'_D}{n_F - n_D} = \frac{1,6347 - 1,6224}{1,5231 - 1,5172} = 2,08$$

Donc

$$\frac{\Delta' n}{\Delta n} = 2,08.$$

Mais

$$\frac{\Delta' n}{\Delta n} = 2,08 = \frac{\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{R'}},$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2,08}\left(\frac{1}{R} - \frac{1,08}{R'}\right),$$

$$x = \frac{2,08 R' R}{(R' - R \times 1,08)} = \frac{6,240}{2,50 - 1,29} = 5^{m},16.$$

Le signe du système dépend de la divergence de la seconde lentille; car, ainsi que nous l'avons dit, $\frac{1}{F} = \Sigma \frac{1}{f} = \frac{1}{f} - \frac{1}{f'}$. Or nous avons, pour la radiation F,

$$\frac{1}{F_F} = (n_F - 1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) - (n'_F - 1)\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{x}\right).$$

La radiation D donnerait une équation de même forme et nous aurions, par soustraction membre à membre,

$$\frac{1}{F} = (n_F - n_D)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) - (n'_F - n'_D)\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{x}\right).$$

Éliminons $\frac{1}{R'} + \frac{1}{x}$ entre ces deux relations, et il viendra

$$\frac{1}{F} = (n_F - n_D)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{n_F - 1}{n_F - n_D} - \frac{n'_F - 1}{n'_F - n'_D}\right).$$

On voit sans peine que la lentille convergente étant de crown, qui est le verre le moins dispersif, le système achromatique doit être convergent, car le terme entre parenthèses prend le signe de $\frac{n_F - 1}{n_F - n_D}$.

CHAPITRE II.

PROPAGATION ET SUPERPOSITION DES ONDES.

Un corps lumineux est animé, dans ses derniers éléments, d'un mouvement vibratoire périodique : ce mouvement et, par suite, le phénomène lumineux se propagent par l'intermédiaire d'un milieu impondérable, l'*éther*, avec une vitesse uniforme $V = \sqrt{\frac{e}{d}}$, e étant son coefficient d'élasticité et d sa densité. La vitesse V de la lumière est égale à $3,004 \times 10^{10}$ centimètres par seconde dans le vide; dans un milieu d'indice n, on a

$$V_n = \frac{3,004 \times 10^{10}}{n}. \qquad (1)$$

La vitesse variable v du mouvement vibratoire est donnée par la formule

$$v = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T}; \qquad (2)$$

T étant la durée de la *période*, α est la vitesse maximum, qui est proportionnelle à l'*amplitude* des vibrations, et t, le temps variable : α devient maximum pour $t = \frac{T}{4} = \frac{3T}{4}$.

La durée de la période T définit la *fréquence* ou le *nombre* N des oscillations :

$$N = \frac{1}{T}.$$

La réfrangibilité, la couleur et les divers caractères d'une radiation dépendent de N ou de T.

On appelle *longueur de l'onde*, dans un milieu déterminé, d'une radiation donnée, le chemin parcouru par elle pendant la durée de la période T :

$$(3) \qquad \lambda = VT = \frac{V}{N};$$

λ varie donc avec la nature de la radiation et avec celle du milieu. A une longueur d'onde λ dans l'air correspond, dans un milieu d'indice n, une longueur

$$(4) \qquad \lambda_n = \frac{V}{nN}.$$

La vitesse du mouvement vibratoire, étant $v = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T}$ en un point origine, sera, à une distance d,

$$(5) \qquad v = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t - \frac{d}{V}}{T} \right) = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda} \right).$$

La quantité $\frac{d}{\lambda}$ définit la *phase* du mouvement vibratoire.

L'*intensité* I de la radiation est égale à la quantité moyenne de force vive qui anime la masse d'éther m :

$$(6) \qquad I = \frac{1}{T} \int_t^{T+t} \frac{mv^2}{2} dt = \frac{m\alpha^2}{4}.$$

L'intensité d'une radiation est donc proportionnelle au carré de l'amplitude de la vibration incidente.

Quand deux mouvements se superposent, ils se combinent et l'on peut calculer les éléments du mouvement résultant : deux vitesses

$$v = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda} \right),$$

$$v' = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d'}{\lambda} \right)$$

s'ajoutent et donnent une vitesse

$$(7) \qquad v_1 = v + v' = 2\alpha \cos\pi \frac{d-d'}{\lambda} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d+d'}{2\lambda}\right).$$

On a de plus, en appelant I ou A^2 l'éclairement en un point,

$$(8) \qquad I = A^2 = 2\alpha^2\left(1 + \cos 2\pi \frac{d-d'}{\lambda}\right) = 4\alpha^2 \cos^2\pi \frac{d-d'}{\lambda}.$$

C'est la loi des *interférences,* que l'on peut énoncer de la manière suivante : *quand deux faisceaux de lumière, de même amplitude et de même longueur d'onde, se superposent après avoir parcouru des chemins différents, ils donnent un éclairement quadruple, quand la différence des chemins parcourus est égale à un multiple pair d'une demi-longueur d'onde; si cette différence est d'un nombre impair de* $\frac{\lambda}{2}$, *il y aura, au contraire, obscurité.* Young avait d'abord formulé cette loi : Fresnel en a vérifié la rigoureuse exactitude par la mémorable expérience des deux miroirs.

On peut avoir des intensités différentes, et, par suite, deux valeurs α et α' des amplitudes : alors

$$(9) \qquad v_1 = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d''}{\lambda}\right),$$

avec les deux équations de condition

$$(10) \qquad A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2\pi \frac{d-d'}{\lambda},$$

$$(11) \qquad \operatorname{tang} 2\pi \frac{d''}{\lambda} = \frac{\alpha \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} + \alpha' \sin 2\pi \frac{d'}{\lambda}}{\alpha \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} + \alpha' \cos 2\pi \frac{d'}{\lambda}}.$$

L'amplitude du mouvement résultant est A; il semble émaner d'un point placé à une distance d''.

Fresnel a donné, en plus de ces équations, une règle connue sous le nom de *règle de Fresnel,* qui permet de composer graphiquement un nombre quelconque de mouvements

vibratoires parallèles, de même période T, mais différant par l'amplitude et la phase.

Cette règle peut s'énoncer en ces termes : *Si l'on représente chaque mouvement vibratoire par une droite, dont la longueur soit égale à l'amplitude α, faisant avec un axe fixe un angle $2\pi\varphi$, φ étant la phase de ce mouvement composant, le mouvement vibratoire résultant sera représenté symboliquement par la résultante géométrique de toutes ces droites.* Sa longueur, mesurée à partir de l'origine, représente l'amplitude A du mouvement résultant, et l'angle de cette droite avec l'axe représente sa phase Φ multipliée par 2π. On compose, en un mot, les droites représentatives des mouvements vibratoires comme on composerait des forces.

Ces équations et ces constructions permettent de résoudre un problème inverse du précédent, à savoir la décomposition d'un mouvement vibratoire en deux ou plusieurs autres. Ainsi tout mouvement peut être décomposé en deux autres de même période, s'effectuant suivant la même direction, et présentant une différence de phase $\varphi = \frac{\lambda}{4}$, pourvu que la somme des carrés des amplitudes des mouvements composants soit égale au carré de l'amplitude du mouvement proposé.

La célèbre expérience des miroirs de Fresnel a permis de confirmer expérimentalement les lois que nous venons d'énoncer.

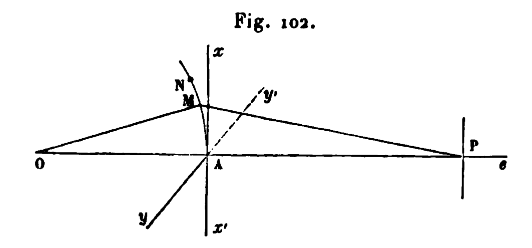
On observe encore les interférences en lumière illimitée et avec de grandes différences de marche; rappelons les expériences de Fizeau, les phénomènes présentés par les lames minces et épaisses (anneaux de Newton et coloration des lames minces et des lames épaisses), les interférences des lames mixtes, les anneaux de Pouillet, les bandes de Quetelet, etc.; dans le spectre, on découvre les franges de de Wrede, d'Ermann, de Baden-Powell, de Talbot, etc. Tous ces faits ont pu être expliqués, sinon prévus, par les considérations qui précèdent et nous croyons inutile de rappeler les théories classiques de ces curieux et remarquables jeux de lumière.

L'interférence des ondes permet aussi d'établir une théorie complète des phénomènes de *diffraction :* le *principe d'Huy-*

gens, d'après lequel la surface d'une onde quelconque peut être regardée comme le lieu géométrique d'une série de centres d'ondes secondaires, permet d'expliquer simplement tous les faits observés par des considérations élémentaires. Fresnel a indiqué des méthodes de calcul qui donnent les positions des franges et leurs intensités maxima et minima; enfin M. Cornu a imaginé une solution graphique très élégante des principaux problèmes de diffraction. Voici, en peu de mots, le résumé de ces remarquables travaux.

Proposons-nous de calculer l'intensité du mouvement lu-

Fig. 102.



mineux envoyé en un point P (*fig.* 102) par une onde dont le centre est en O et dont le rayon OA $= a$; posons

$$\text{AP} = b, \qquad \text{PM} = b + \delta \qquad \text{et} \qquad \text{AM} = s.$$

La vitesse envoyée par l'élément ds, placé en M, est

$$\sin 2\pi \left(\frac{t}{\text{T}} - \frac{b + \delta}{\lambda} \right) ds;$$

la vitesse totale envoyée en P, parallèlement à la direction considérée, est

$$\int \sin 2\pi \left(\frac{t}{\text{T}} - \frac{b + \delta}{\lambda} \right) ds.$$

Par un choix convenable de l'origine du temps, on peut faire disparaître b, qui est commun à tous les mouvements vibratoires arrivant en P des divers points de l'onde : tous ces mouvements sont de même période, et on admet qu'ils sont de même amplitude; ils diffèrent entre eux par la phase $\frac{\delta}{\lambda}$.

Il s'agira d'intégrer, entre les limites déterminées par les cas proposés, l'expression

$$\int \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\delta}{\lambda}\right)ds$$
$$=\int\left(\cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}ds\right)\sin 2\pi\frac{t}{T}-\int\left(\sin 2\pi\frac{\delta}{\lambda}ds\right)\cos 2\pi\frac{t}{T}.$$

La vitesse v_1 sera le résultat de la superposition de deux ondes parallèles, dont l'amplitude est donnée par les quantités renfermées entre parenthèses et les phases par les seconds facteurs.

Nous aurons, d'après l'équation (10), en observant que

$$-\cos 2\pi\frac{t}{T}=\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\frac{\lambda}{4}}{\lambda}\right),$$
$$A^2=I=\left(\int\cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}ds\right)^2+\left(\int\sin 2\pi\frac{\delta}{\lambda}ds\right)^2.$$

Or nous pouvons établir une relation entre la longueur de l'arc s et l'accroissement δ de la droite qui joint P à son extrémité :

$$\delta=\frac{a+b}{2ab}s^2;$$

donc

$$(12)\quad I=\left(\int\cos\pi\frac{a+b}{ab\lambda}s^2\,ds\right)^2+\left(\int\sin\pi\frac{a+b}{ab\lambda}s^2\,ds\right)^2.$$

Ces intégrales ne peuvent être exprimées en termes finis; Fresnel les a remplacées par d'autres, d'une forme mieux appropriée, obtenue par un changement de variable, en posant

$$\frac{a+b}{ab\lambda}s^2=\frac{1}{2}v^2.$$

Il vient

$$(13)\quad I=\frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left[\left(\int\cos\frac{\pi}{2}v^2dv\right)^2+\left(\int\sin\frac{\pi}{2}v^2dv\right)^2\right].$$

Ce sont les *intégrales de Fresnel;* elles ne contiennent sous le signe $\int$ aucune donnée particulière, et il suffira de les calculer une fois pour toutes; c'est ce qu'a fait Fresnel et l'on trouvera leurs valeurs ci-après, de $v = 0$ à $v = 5$. Ces Tables ont été calculées à nouveau par MM. Knochenhauer, Cauchy et Gilbert, par des procédés plus ingénieux que celui qu'avait employé Fresnel, et les valeurs des intégrales sont connues aujourd'hui avec une grande précision. Elles se prêtent très facilement aux applications.

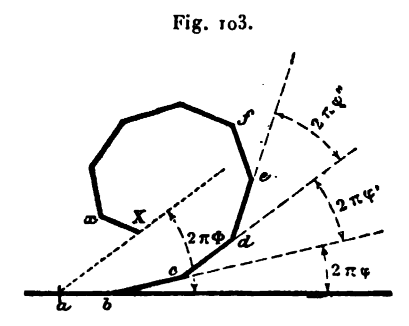
Au lieu d'une Table, il serait préférable de disposer d'une courbe, qui montrerait immédiatement la quantité de lumière envoyée en un point par une portion de l'onde : cette courbe a été construite par M. Cornu.

Il a obtenu ce résultat important en appliquant la règle de Fresnel. On a, en effet, à composer la résultante des mouvements envoyés au point P par les divers éléments de la demi-onde commençant en A : ces mouvements ont même amplitude, mais ils ne sont pas dans la même phase; δ est leur différence de marche; nous aurons donc

$$\varphi = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{a+b}{2ab\lambda} s^2.$$

Nous construirons la courbe symbolique destinée à nous faire connaître la résultante, en portant bout à bout des arcs égaux ab, bc, cd (*fig.* 103), inclinés l'un sur l'autre d'angles

Fig. 103.



$2\pi\varphi$, $2\pi\varphi'$, ...; on obtient ainsi une ligne polygonale qui affecte la forme d'une spirale, dont la longueur est propor-

tionnelle à la portion correspondante de l'arc d'onde; elle jouit de la propriété que l'amplitude et la phase résultante des mouvements, envoyés par un nombre quelconque d'éléments consécutifs de l'onde, sont fournis par la droite qui joint les extrémités des arcs représentatifs correspondants. Ainsi l'amplitude du mouvement résultant

$$ab + bc + cd + \ldots + x\mathrm{X}$$

est $a\mathrm{X}$ et sa phase est Φ.

La courbe en spirale s'enroule en anneaux de plus en plus resserrés, dont la limite est un cercle de circonférence proportionnelle à la longueur d'onde λ, c'est-à-dire de rayon négligeable; on considère la spirale comme ayant un point asymptotique en A.

Or cette courbe peut être construite par points.

En effet, à chaque élément ds de l'onde agissante AM, faisons correspondre un élément $d\sigma$ de la courbe, dont les coordonnées sont x et y; on a

$$d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \mathrm{K}\,d\mathrm{S},$$

$$\operatorname{tang} 2\pi\varphi = \frac{dy}{dx}.$$

Mais

$$\varphi = \frac{a+b}{2ab\lambda} s^2$$

et

$$\operatorname{tang} 2\pi\varphi = \operatorname{tang} 2\pi \frac{a+b}{2ab\lambda} s^2 = \operatorname{tang} \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2 = \operatorname{tang} \alpha s^2.$$

On en déduit

$$(14) \qquad x = \mathrm{K}\int_0^s \cos\alpha s^2\, ds \qquad \text{et} \qquad y = \mathrm{K}\int_0^s \sin\alpha s^2\, ds.$$

Ces quadratures ne peuvent s'exprimer en termes finis : posons

$$(14\ bis) \qquad \alpha s^2 = \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2 = \frac{\pi}{2} v^2, \qquad \text{d'où} \qquad s = v\sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}.$$

Il vient

$$(15)\quad \begin{cases} x = K\displaystyle\int_0^s \cos\pi\frac{a+b}{ab\lambda}s^2\,ds \\ \quad = K\displaystyle\int_0^{v\sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}} \cos\frac{\pi}{2}v^2\,dv\sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}} \\ \quad = K\sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}\displaystyle\int_0^\varepsilon \cos\frac{\pi}{2}v^2\,dv \end{cases}$$

et

$$(15\ bis)\qquad y = K\sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}\int_0^\varepsilon \sin\frac{\pi}{2}v^2\,dv.$$

Nous retrouvons les valeurs mêmes des intégrales de Fresnel; on peut donc construire la courbe par points en prenant pour abscisses et pour ordonnées les valeurs des deux intégrales définies de Fresnel.

La *fig.* 104 a été construite de la sorte, en supposant égal à l'unité le facteur constant des équations (15) et (15 *bis*) : on voit comment ont été construits les points 0,1; 0,2; 0,3; ..., sur les valeurs de x et y fournies par la Table de Fresnel : l'échelle de l'épure est de 5^{mm} pour 1. La graduation tracée sur la courbe est celle de la valeur même de v qui servira de limite : tous ces arcs sont de même longueur développée. On n'a donc plus à s'occuper de l'échelle de proportionnalité entre la courbe et l'onde : v est lié à s par la formule (14 *bis*).

Les points asymptotiques correspondent à une valeur infinie de v; comme les deux intégrales convergent vers la même valeur $\frac{1}{2}$, ces points ont pour coordonnées $x = y = \pm\frac{1}{2}$.

L'étude et la discussion des divers cas de la diffraction sont grandement facilitées par ces courbes qui peignent aux yeux les phénomènes, tandis que les intégrales de Fresnel ne parlent qu'à l'esprit : une épure bien faite permet des mesures exactes.

Les phénomènes d'interférence peuvent servir à la mesure des longueurs d'onde et à la détermination des indices de réfraction, à l'aide des *réfractomètres interférentiels*.

Pour la mesure des longueurs d'onde, on emploie les miroirs de Fresnel, les appareils à anneaux de Newton, disposés

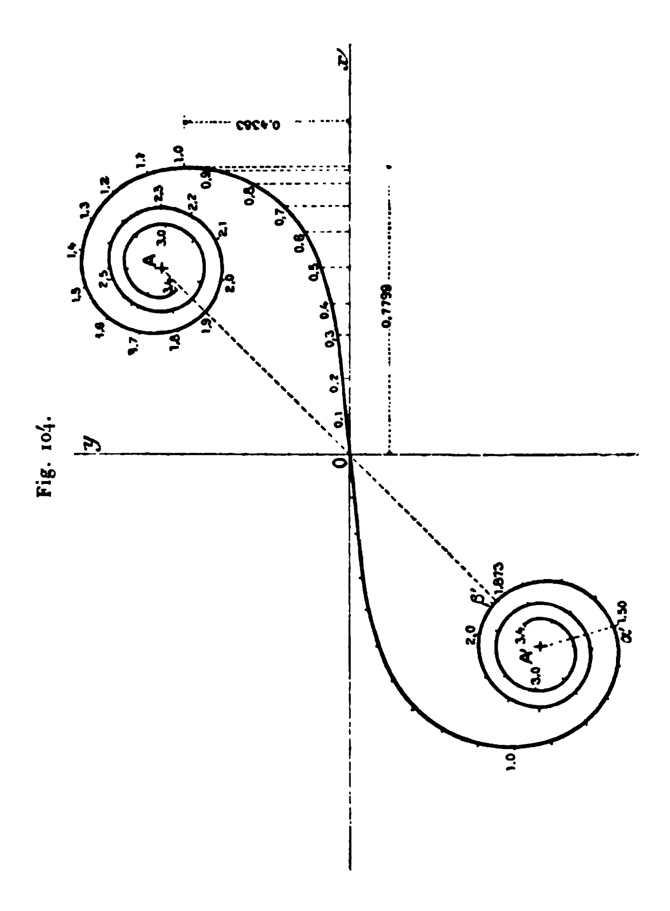


Fig. 104.

à cet effet par P. Desains, et les réseaux. Les miroirs donnent

$$\lambda = \frac{l \tan g \varphi}{n}, \tag{16}$$

si nous appelons l la distance de la $n^{\text{ième}}$ frange à la frange centrale et φ l'angle sous lequel on voit les deux images virtuelles du foyer de cette frange centrale; un soulèvement e

d'une lentille, ayant fait émerger n anneaux du centre noir, on a

$$\lambda = \frac{2e}{n}; \tag{17}$$

enfin un réseau de N traits par millimètre fait subir une déviation δ à une raie déterminée dans un spectre de rang n et l'on peut écrire

$$\delta = \frac{\sin\delta}{nN}. \tag{18}$$

Si le plan du réseau avait été incliné d'un angle i sur le front de l'onde plane qui le traverse, on aurait eu

$$\sin i - \sin(i - \delta) = nN\lambda,$$

d'où

$$\lambda = \frac{2}{nN} \sin\frac{\delta}{2} \cos\left(i - \frac{\delta}{2}\right);$$

la déviation sera minimum lorsqu'on aura

$$i = \frac{\delta}{2},$$

et alors

$$\lambda = \frac{2}{nN} \sin\frac{\delta}{2}. \tag{19}$$

Les réfractomètres, dont on a beaucoup varié les formes et les dispositions depuis Fresnel, reposent tous sur la formule

$$e(n - 1) = N\lambda, \tag{20}$$

e étant l'épaisseur du milieu d'indice n et N le nombre de rangs dont les franges se déplacent.

CONSTANTES NUMÉRIQUES.

Longueurs d'onde λ (Angström) dans l'air,

$H = 760^{mm}$, $t = 16°$.

Radiation.	N.	λ en centimètres.	λ en microns (millièmes de millimètre).
A	$3,95 \times 10^{14}$	$7,604 \times 10^{-5}$	0,7604
B	4,37	6,867	0,6867
C	4,58	6,562	0,6562
$\frac{D + D_1}{2}$	5,10	5,893 (¹)	0,5893
E	5,70	5,269	0,5269
F	6,18	4,861	0,4861
G	6,97	4,307	0,4307
H_1	7,57	3,968	0,3968
H_2	7,64	3,933	0,3933

Longueurs d'onde des diverses couleurs.

	En microns.
Rouge extrême de Newton	0,645
Verre rouge de Fresnel	0,638
Verre rouge de Biot	0,628
Violet extrême de Newton	0,406
Violet extrême de Fraunhofer	0,360

Échelle chromatique de Newton (calculée par Brucke).

e en millionièmes de millimètre.	Lumière transmise.	Lumière réfléchie
0	Blanc.	Noir.
40	Blanc.	Gris de fer.
97	Blanc jaunâtre.	Gris de lavande.
158	Blanc jaunâtre.	Gris bleu.
218	Jaune brun.	Gris plus clair.
234	Brun.	Blanc avec une légère teinte verte.
259	Rouge clair.	Blanc presque pur.

(¹) Pour les raies D, on admet généralement la valeur de M. Mascart, $\lambda = 5,8940$.

e en millionièmes de millimètre.	Lumière transmise.	Lumière réfléchie.
267........	Rouge carmin.	Blanc jaunâtre.
275........	Rouge brun presque noir.	Jaune paille.
281........	Violet foncé.	Jaune paille.
306........	Indigo.	Jaune clair.
322........	Bleu.	Jaune brillant.
430........	Bleu verdâtre.	Jaune orangé.
505........	Vert bleuâtre.	Orangé rougeâtre.
536........	Vert pâle.	Rouge chaud.
551........	Vert jaunâtre.	Rouge plus foncé.
565........	Vert plus clair.	Pourpre.
575........	Jaune verdâtre.	Violet.
589........	Jaune vif.	Indigo.
664........	Orangé.	Bleu.
728........	Orangé brunâtre.	Bleu verdâtre.
747........	Rouge carmin clair.	Vert.
826........	Pourpre.	Vert plus clair
843........	Pourpre violacé.	Vert jaunâtre.
866........	Violet.	Jaune.
910........	Indigo.	Jaune pur.
948........	Bleu foncé.	Orange.
998........	Bleu verdâtre.	Orange rougeâtre vif.
1101........	Vert.	Rouge violacé foncé.
1128........	Vert jaunâtre.	Violet bleuâtre clair, teinte de passage.
1151........	Jaune impur.	Indigo.
1258........	Couleur de chair.	Bleu, teinte verdâtre.
1334........	Rouge mordoré.	Vert bleuâtre, vert d'eau.
1376........	Violet.	Vert brillant.
1426........	Bleu violacé grisâtre.	Jaune verdâtre.
1495........	Bleu verdâtre.	Rouge rose.
1534........	Vert d'eau.	Rouge carmin.
1621........	Vert clair.	Carmin pourpré.
1652........	Vert jaunâtre.	Gris violacé.
1682........	Jaune.	Gris bleu.
1711........	Gris jaune.	Bleu verdâtre clair.
1744........	Mauve.	Vert bleuâtre.
1811........	Carmin.	Vert d'eau clair.
1927........	Gris rouge.	Gris vert clair.
2007........	Gris bleu.	Gris presque blanc.

Intégrales de Fresnel.

v.	$\int_0^v \cos \frac{\pi}{2} v^2 \, dv$.	$\int_0^v \sin \frac{\pi}{2} v^2 \, dv$.
0,0	0,0000	0,0000
0,1	0,0999	0,0005
0,2	0,1999	0,0042
0,3	0,2994	0,0141
0,4	0,3975	0,0334
0,5	0,4923	0,0647
0,6	0,5811	0,1105
0,7	0,6597	0,1721
0,8	0,7230	0,2493
0,9	0,7648	0,3398
1,0	0,7799	0,4383
1,1	0,7638	0,5365
1,2	0,7154	0,6234
1,3	0,6836	0,6863
1,4	0,5431	0,7135
1,5	0,4453	0,6975
1,6	0,3665	0,6383
1,7	0,3228	0,5492
1,8	0,3363	0,4509
1,9	0,3945	0,3734
2,0	0,4883	0,3434
2,1	0,5814	0,3743
2,2	0,6362	0,4556
2,3	0,6268	0,5525
2,4	0,5550	0,6197
2,5	0,4574	0,6192
2,6	0,3889	0,5500
2,7	0,3926	0,4529
2,8	0,4675	0,3915
2,9	0,5624	0,4102
3,0	0,6057	0,4963
3,1	0,5616	0,5818
3,2	0,4663	0,5933
3,3	0,4057	0,5193
3,4	0,4385	0,4297
3,5	0,5326	0,4153
3,6	0,5880	0,4923

v.	$\int_0^v \cos\frac{\pi}{2}v^2\,dv$.	$\int_0^v \sin\frac{\pi}{2}v^2\,dv$.
3,7	0,5419	0,5750
3,8	0,4481	0,5656
3,9	0,4223	0,4752
4,0	0,4984	0,4205
4,1	0,5737	0,4758
4,2	0,5417	0,5632
4,3	0,4494	0,5540
4,4	0,4383	0,4623
4,5	0,5258	0,4342
4,6	0,5672	0,5162
4,7	0,4914	0,5669
4,8	0,4338	0,4968
4,9	0,5002	0,4351
5,0	0,5636	0,4992
∞	0,5000	0,5000

APPLICATIONS.

1. *Les miroirs de Fresnel donnent des franges dont on mesure la largeur en constatant que la vingtième frange brillante est à 3mm,75 de la frange centrale, en lumière rouge. Sous quel angle φ se voient, du centre du micromètre, les deux images virtuelles de la fente lumineuse?*

Appliquons la formule connue (¹)

$$n\lambda = l \operatorname{tang}\varphi. \tag{16}$$

Nous aurons

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{n\lambda}{l} = \frac{20 \times 0,000645}{3,75},$$

$$\varphi = 11^\circ 58''.$$

(¹) On donne quelquefois la formule (16) sous la forme $n\frac{\lambda}{2} = l \operatorname{tang}\varphi$; on compte alors successivement les franges brillantes et obscures, de telle sorte que, pour 20 franges brillantes, on donne à n une valeur égale à 40.

2. *Deux rayons interférents traversent deux tubes de 3m de long, pleins d'air, à la pression de 760mm; on comprime légèrement le gaz dans un des tubes et l'on voit les franges reculer de douze rangs dans la lumière jaune. Quelle est, en millimètres de mercure, l'augmentation de pression produite?*

La différence de marche est

$$e(n-1) = 12\lambda. \tag{20}$$

Cette équation donne la valeur de l'indice n par rapport à l'indice de l'air à 760mm de pression.

$$n = 1 + \frac{12\lambda}{e} = 1 + \frac{12 \times 5{,}894 \times 10^{-5}}{300} = 1{,}0000023468.$$

Or, d'après la loi de Dale et Gladstone (¹),

$$\frac{n-1}{d} = \text{const.};$$

d'où

$$\frac{(n-1)(1+\alpha t)}{H} = \frac{(n'-1)(1+\alpha t')}{H'},$$

H′ étant la pression normale de 760mm et n' l'indice correspondant égal à 1,00029.

Admettons que le changement de pression n'ait pas entraîné de variation de température : nous aurons

$$(n-1)H' = (n'-1)H.$$

Prenons H′ pour unité et évaluons n en valeur absolue:

$$H = \frac{n-1}{n'-1} = \frac{1{,}00029 \times 1{,}0000023468 - 1}{1{,}00029 - 1} = \frac{2927}{2900}.$$

L'augmentation de pression est donc de $\frac{27}{2900}$, soit de 7mm de mercure environ sur 760mm.

(¹) Cette loi n'est qu'approximative, mais on peut en admettre l'exactitude dans des recherches de ce genre.

3. *M. Fizeau place un petit trépied sur un plan de verre; ce trépied soutient une lentille et l'on observe, en lumière jaune, des anneaux réfléchis à centre noir; mais le voisinage des mains de l'opérateur suffit pour faire reculer les anneaux noirs de deux rangs; de combien s'est dilaté le trépied?*

Il s'est dilaté de

$$2 \times \frac{1}{2} \times 5{,}894 \times 10^{-5} \text{ cent.} = 5{,}894 \times 10^{-5} \text{ cent.}$$

4. *La tête d'une vis micrométrique porte un plan de verre, parfaitement normal à l'axe, en face duquel est disposée une lentille de verre, qu'on éclaire à la lumière jaune. Pour un tour de vis, on voit rentrer soixante anneaux dans la tache centrale; quel est le pas de la vis?*

Le pas de la vis est égal à

$$60 \times \frac{1}{2} 0{,}0005894^{\text{mm}} = 0{,}0176^{\text{mm}}.$$

Dans ce problème, comme dans le précédent, il est à remarquer que, pour ramener n fois le centre à être noir, il faut écarter les verres de $n\frac{\lambda}{2}$. Cette dernière manière d'énoncer le fait est préférable à celle qui consiste à compter les déplacements d'anneaux, car cette locution prête à l'amphibologie.

5. *Quelle est l'épaisseur de la paroi d'une bulle de savon présentant par réflexion le jaune paille du premier ordre? L'indice de l'eau de savon est* $n = 1{,}39$.

On sait que les épaisseurs correspondant à un anneau de Newton de même ordre, pour diverses substances, sont inversement proportionnelles à l'indice de réfraction de la substance. Soient donc x l'épaisseur de la lame d'eau et e celle d'une lame d'air réfléchissant la même teinte : nous aurons

$$x = e\,\frac{n_{\text{air}}}{n_x} = e \times \frac{1{,}0029}{1{,}39} = \frac{0{,}275 \times 1{,}0029}{1{,}39} = 0^{\mu}{,}198.$$

6. *Une lentille de* $13^m,29$ *de rayon est placée sur un plan de verre noir et éclairée par de la lumière jaune; on observe les anneaux sous un angle de* $7°\,55'$; *quel est le diamètre du dixième anneau obscur ?*

L'épaisseur e est d'une part égale à $\frac{d^2}{8R}$, d étant le diamètre de l'anneau et R le rayon de courbure de la lentille; d'autre part, nous avons

$$e = N\frac{\lambda}{2}\,\text{séc}\,i.$$

Si nous convenons de compter 1 sur la tache centrale, comme le faisait Newton et, à sa suite, MM. de la Provostaye et Desains, nous dirons 9 sur le dixième anneau, soit donc $N-1$: il vient par conséquent

$$d^2 = 4(N-1)R\lambda\,\text{séc}\,i = 4 \times 9 \times 13290 \times 0,000589\,\text{séc}\,7°55'.$$

Nous trouvons

$$d = 16^{mm},85.$$

L'observation a donné 16,69.

7. *Dans un champ, éclairé par l'alcool salé, MM. Fizeau et Foucault ont vu disparaître les franges, qui étaient produites entre une lentille et un plan, après que 500 anneaux se furent dégagés de leur centre noir ; on demande de calculer le rapport des longueurs d'onde des deux raies* D.

La lumière jaune est dichromatique et elle se réduit aux deux radiations D_1 et D_2, dont les longueurs d'onde sont λ_1 et λ_2 : les anneaux ont disparu par suite de la coexistence de deux systèmes d'anneaux correspondant à une différence de marche d'une demi-longueur d'onde, de telle sorte que

$$2n\frac{\lambda_1}{2} = (2n+1)\frac{\lambda_2}{2},$$

d'où

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{2n+1}{2n} = \frac{501}{500} = 1,002.$$

8. *Plaçons une fente mince sur une frange quelconque donnée, en lumière blanche, par les miroirs de Fresnel; recevons le pinceau transmis à travers cette fente sur un système de prisme et de lentille disposé de façon à obtenir un spectre très pur; il est sillonné de bandes de même largeur, équidistantes, et l'on en compte un nombre* $m = 16$ *entre les raies* D *et* H. *Quel est le rang* (n_1) *de la frange dans le jaune?*

Appelons $\lambda_D, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_H$ les longueurs d'onde correspondant aux milieux des bandes, en partant du jaune : nous aurons, pour chacune d'elles,

$$\delta = n_1\lambda_D = n_2\lambda_2 = \ldots\ldots = n_m\lambda_H.$$

De plus,

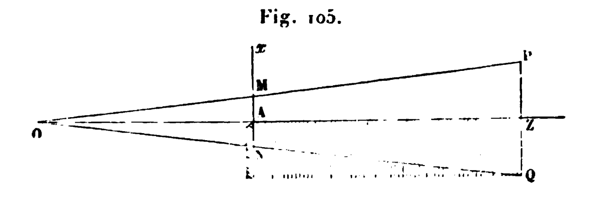
$$n_m = n_1 + (m - 1).$$

On en déduit

$$n_1 = (m-1)\frac{\lambda_H}{\lambda_D - \lambda_H} = 15\,\frac{0,0003968}{0,0005894 - 0,0003968} = 32.$$

9. *Une fente lumineuse* O (*fig.* 105) *est placée à une distance* $a = 1^m,10$ *d'un écran indéfini* AN, *dont les rayons rasent le bord* A; *un second écran parallèle* PQ, *distant de* $b = 0^m,80$, *reçoit les rayons diffractés. On demande de calculer l'intensité lumineuse à* 1^{mm} *de la limite de l'ombre géométrique* z *du bord* A, *du côté non éclairé; de plus, on déterminera la distance de la première frange sombre du côté opposé. On opère en lumière rouge.*

Fig. 105.



L'arc efficace de l'onde est égal à une demi-onde augmentée de AM en P, d'une demi-onde moins AN en Q.

En un point quelconque

$$(13) \quad I = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left[\left(\int \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv\right)^2 + \left(\int \sin\frac{\pi}{2}v^2 dv\right)^2\right],$$

v étant à déterminer pour ce point.

Prenons pour unité d'intensité celle de la lumière qui tomberait sur le second écran en Z si le premier n'existait pas; on sait que

$$\int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv = \int_0^\infty \sin\frac{\pi}{2}v^2 dv = \frac{1}{2}.$$

Entre les limites $+\infty$ et $-\infty$, chaque intégrale est égale à 1; leur somme est égale à 2 et le facteur $\frac{ab\lambda}{2(a+b)}$ doit, par suite, être égalé à $\frac{1}{2}$.

En un point quelconque, nous avons donc

$$I = \frac{1}{2}\left[\left(\int \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv\right)^2 + \left(\int \sin\frac{\pi}{2}v^2 dv\right)^2\right].$$

Soit x la distance Qz : cherchons la valeur de v correspondante; AN est égal à s.

$$\frac{x}{s} = \frac{OZ}{OA} = \frac{a+b}{a},$$

$$s = v\sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}},$$

$$x = v\sqrt{\frac{(a+b)}{2a}b\lambda}.$$

v est donc connu en fonction de x et nous pouvons calculer sa valeur :

$$v = x\sqrt{\frac{2a}{(a+b)b\lambda}} = 1\sqrt{\frac{2200}{1900\times 800\times 0,000645}} = 1,50.$$

Au point déterminé, nous aurons donc, du côté de l'ombre,

$$I = \frac{1}{2}\left[\left(\int_{v'}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2}v^2dv\right)^2 + \left(\int_{v'}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2}v^2dv\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} - \int_0^{v'}\cos\frac{\pi}{2}v^2dv\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \int_0^{v'}\sin\frac{\pi}{2}v^2dv\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} - 0,4453\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0,6975\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overline{0,0547}^2 + \overline{0,1975}^2\right) = \frac{1}{2}\times 0,042 = 0,021.$$

Pour un point situé en lumière, nous aurons

$$I = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} + \int_0^{v'}\cos\frac{\pi}{2}v^2dv\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \int_0^{v'}\sin\frac{\pi}{2}v^2dv\right)^2\right].$$

Nous cherchons le premier minimum : Fresnel avait trouvé la solution de ce problème en établissant une formule d'interpolation que nous ne pouvons donner ici. Le procédé le plus pratique consiste à déterminer la valeur de I pour un certain nombre de valeurs de v croissant suivant une progression lente, à en construire la courbe et à déterminer par interpolation la position exacte du maximum. On démontrera ainsi que la première frange sombre correspond à une valeur de v égale à 1,873; prenons 1,9.

$$x = 1,9\sqrt{\frac{(a+b)}{2a}b\lambda} = 1,9\times 0,6709 = 1,275.$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} + 0,3945\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + 0,3734\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}(0,8002 + 0,7628) = \frac{1}{2}\times 1,5630 = 0,781.$$

Voici, du reste, d'après Fresnel, les intensités maxima et minima des franges et les valeurs de v correspondantes [1] :

---

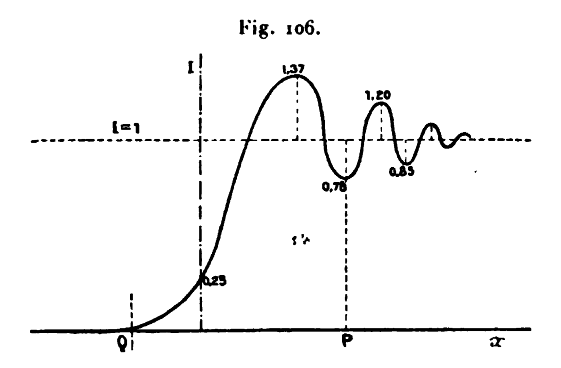
[1] On passe des v aux x par la formule rappelée ci-dessus

$$x = v\sqrt{\frac{(a+b)}{2a}b\lambda}.$$

	I.	v.
1er maximum	1,37	1,217
1er minimum...........	0,78	1,873
2e maximum	1,20	2,345
2e minimum...........	0,85	2,739
3e maximum	1,15	3,082
3e minimum...	0,87	»
4e maximum	1,12	»

La *fig.* 106 représente synoptiquement ces résultats. On a porté les x en abscisse et les intensités I en ordonnée.

Fig. 106.



Faisons observer que la loi de répartition des intensités des franges données par le bord rectiligne d'un écran indéfini ne diffère que par un coefficient de proportionnalité dans tous les cas qu'on peut avoir à étudier.

10. *Résoudre le même problème à l'aide des spirales de M. Cornu.*

La solution est immédiate.

Prenons d'abord le point Q situé dans l'ombre; la valeur de v correspondant à $x = 1^{mm}$ est 1,50; marquons ce point sur la spirale de gauche en α' (*fig.* 104).

L'intensité est égale au carré du rayon vecteur $A'\alpha'$: on voit qu'elle décroît régulièrement au fur et à mesure qu'on s'éloigne de Z, sans maximum ni minimum, puisque le rayon

vecteur de la spirale diminue sans présenter aucune variation périodique en tournant autour du point A'.

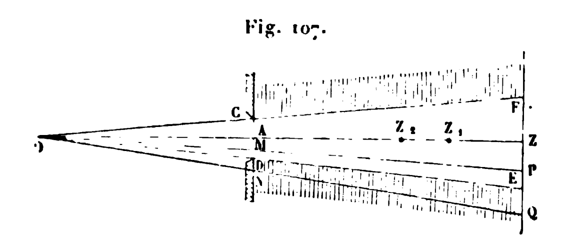
En P, l'arc efficace est d'une demi-onde augmentée d'une portion d'onde croissante. Le premier minimum est facile à déterminer, du moment que nous savons qu'il correspond à $v = 1,873$. Sur la spirale de droite, $\overline{OA}^2$ donne l'action de la demi-onde entière; l'action de la portion de demi-onde $O\alpha'\beta'$ est égale au carré du rayon vecteur $O\beta'$. Le minimum est évident.

11. *Discuter, à l'aide des spirales de M. Cornu, la diffraction produite par une fente mince* CD (*fig.* 107).

Considérons une onde cylindrique dont la ligne médiane A de la fente soit une génératrice; il y aura symétrie par rapport à la projection Z de cette ligne sur l'écran, et nous n'aurons à examiner le phénomène que d'un côté de ce point.

L'intensité de la lumière en Q est définie par l'action d'un arc constant CD de l'onde dont la distance au pôle correspon-

Fig. 107.

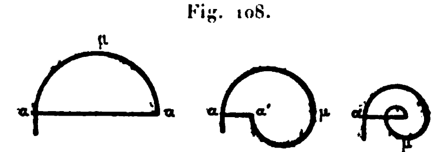


dant D croît progressivement à mesure que le point Q s'éloigne de Z. Nous reportant à la spirale, nous prendrons donc un arc $O\alpha = ND$ et $O\mu\alpha' = CD$; la corde $\alpha\alpha'$ représentera l'intensité cherchée.

On voit sans peine qu'au fur et à mesure qu'on s'éloigne de O sur la spirale, la corde passe tour à tour par des minima, quand l'arc forme un nombre entier de spires, par des maxima quand il recouvre un nombre impair de moitiés de spires

(*fig.* 108); enfin l'on tend vers zéro quand on s'approche du point asymptotique.

Fig. 108.



12. *Courbez une lame mince de mica en forme de tube cylindrique et examinez à travers un prisme la ligne brillante obtenue en éclairant ce cylindre; le spectre est sillonné de bandes. C'est le phénomène de de Wrede. Combien y aura-t-il de bandes entre deux radiations de longueur d'onde λ et λ', sachant que la lame a une épaisseur e, que l'angle de réfraction est r et que l'indice du mica est n pour la longueur d'onde λ et n' pour la longueur d'onde λ'?*

Les bandes sont l'effet de l'interférence des rayons réfléchis sur les deux faces de la lame; leur différence de marche est $2en\cos r + \frac{\lambda}{2}$, $\frac{\lambda}{2}$ provenant de la perte subie dans la première réflexion; pour une bande noire, on a donc

$$2en\cos r = (2p+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Entre deux raies correspondant aux radiations λ et λ', nous compterons un nombre de bandes égal à

$$m' - m = N = 2e\left(\frac{n'\cos r'}{\lambda'} - \frac{n\cos r}{\lambda}\right).$$

13. *Entre la lentille d'un collimateur et le prisme d'un spectroscope, on dispose une lame de verre normale au faisceau de lumière et traversée par la moitié de ce faisceau. On observe un spectre cannelé. Trouver le nombre de cannelures entre les parties du spectre où la longueur d'onde est respectivement de* $0^{mm},0004$ *et* $0^{mm},0006$; *l'indice moyen du verre*

est égal à $\frac{3}{2}$; on négligera les variations d'indice avec la longueur d'onde; l'épaisseur de la lame est de $0^{mm},3$ (1).

Il s'agit des bandes de Talbot : en interceptant la moitié du faisceau de lumière, on retarde cette partie du faisceau et, si l'incidence est normale, on produit une différence de marche égale à $e(n-1)$: il y aura extinction pour toutes les longueurs d'onde satisfaisant à l'équation

$$e(n-1)=(2p+1)\frac{\lambda}{2}.$$

D'une bande à l'autre du spectre, il y a donc une différence de marche d'une longueur d'onde de la radiation correspondante; et, si nous comptons N bandes, nous pouvons écrire

$$\mathrm{N}=e\left(\frac{n-1}{\lambda}-\frac{n-1}{\lambda'}\right)=(n-1)e\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times 0,3\left(\frac{1}{0,0006}-\frac{1}{0,0004}\right)=125 \text{ bandes.}$$

Notons que la portion interceptée doit être voisine de l'arête et non de la base du prisme; M. Mascart a signalé et expliqué ce fait (2).

14. *Un réseau, tracé sur verre, de* 100 *traits par millimètre est traversé par de la lumière jaune; on le place dans la direction qui correspond au minimum de déviation et l'on observe. pour la raie* D *du second spectre, une déviation* $\delta=6°45'32''$. *Calculer d'après ces résultats la longueur d'onde* λ *de la raie* D.

$$(19)\qquad \lambda=\frac{2}{n\mathrm{N}}\sin\frac{\delta}{2}=\frac{2}{2.100}\sin 3°22'46''=0^{mm},00058943.$$

15. *Deux rayons interférents verticaux traversent des hauteurs égales d'un même liquide et donnent en un point repéré*

---

(1) Cette question a été posée aux examens de licence de la Faculté de Paris, en juillet 1887.

(2) *Journal de Physique*, t. I, p. 18?.

une frange centrale brillante; on fait monter le niveau du liquide sur le chemin d'un des rayons; soit $e = 0^{mm},1$ *la différence de hauteur ainsi produite entre les deux colonnes. Il en résulte un déplacement de* $N = 40$ *franges dans le rouge: quel est l'indice n du liquide?*

(20) $$e(n-1) = N\lambda,$$

$$n = \frac{N\lambda + e}{e} = 1 + \frac{N\lambda}{e} = 1 + \frac{40 \times 0,000645}{0,1} = 1,258.$$

CHAPITRE III.

DOUBLE RÉFRACTION.

Un rayon de lumière, transmis à travers une lame cristalline anisotrope, se bifurque en deux autres, dont l'un (dans les systèmes symétriques par rapport à une droite) suit les deux lois de Descartes, tandis que l'autre en est affranchi; on les appelle pour cette raison, le premier, le rayon *ordinaire*, le second, le rayon *extraordinaire* : les cristaux qui présentent ces phénomènes sont dits *uniaxes*, parce que la double réfraction révèle, comme la cristallisation, une symétrie par rapport à une droite, qui est l'*axe optique*, confondu avec l'axe minéralogique. Dans les cristaux qui ont trois axes minéralogiques inégaux, aucun des deux rayons ne suit généralement les lois de Descartes : ces cristaux sont *biaxes;* en effet, les phénomènes offrent une certaine symétrie par rapport à deux directions qu'on appelle encore les *axes optiques*.

On appelle *section principale* d'un cristal le plan déterminé par l'axe et par une normale à la face d'entrée du rayon considéré. Chaque face a donc une seule section principale; toutefois une face perpendiculaire à l'axe en a une infinité.

Nous nous occuperons plus spécialement des cristaux uniaxes.

Prenons un prisme dont les faces sont taillées dans une direction quelconque, et recevons sur une de ses faces un faisceau de lumière parallèle monochromatique; on obtient deux rayons inégalement déviés; l'un d'eux a un indice constant n_0 : c'est l'indice du rayon ordinaire; pour l'autre, le rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction n'est pas constant : c'est le rayon extraordinaire. Toutefois, si l'arête réfringente du prisme avait été prise parallèle à

l'axe, on aurait trouvé, même pour le rayon extraordinaire, un rapport constant qui sert à définir l'indice extraordinaire n_e (1).

La construction de Huygens permet de tracer la trajectoire des deux rayons dans toutes les directions de taille du prisme et d'incidence du rayon : cette construction, qu'il est inutile de rappeler à nos lecteurs, a reçu une explication complète par la théorie que Fresnel a donnée de la double réfraction. Cette théorie s'applique aux uniaxes et aux biaxes.

Appelons *axes d'élasticité* du cristal toute direction telle qu'un déplacement très petit, s'effectuant parallèlement à cette direction, donne naissance à une force élastique parallèle au déplacement. Il y a, en général, dans un milieu homogène, trois axes d'élasticité, qui sont rectangulaires entre eux. Soient a, b et c les vitesses de propagation des déplacements parallèles aux axes, ces vitesses étant proportionnelles à la racine carrée de la force élastique. Supposons qu'il y ait dans l'intérieur du cristal un centre d'ébranlement; la lumière se propagera dans tous les sens à la fois et arrivera, après l'unité de temps, sur une surface qui est la *surface de l'onde :* elle a pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)-a^2(b^2+c^2)x^2\\ &\qquad -b^2(c^2+a^2)y^2-c^2(a^2+b^2)z^2+a^2b^2c^2=0.\end{aligned}\right.$$

C'est une surface du quatrième degré à deux nappes distinctes.

Si deux de ces vitesses deviennent égales, comme cela a lieu dans les uniaxes, et que $b=c$, par exemple, l'équation (1) se décompose en deux autres

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2=b^2,\\ &a^2x^2+b^2y^2+b^2z^2=a^2b^2.\end{aligned}\right.$$

La surface de l'onde se compose dans ce cas d'une sphère

(1) Lorsque le plan d'incidence contient l'axe, c'est-à-dire lorsque ce plan constitue une section principale du cristal, le rayon extraordinaire reste contenu dans le plan d'incidence, mais son indice varie avec l'incidence.



et d'un ellipsoïde de révolution tangent à la sphère aux deux extrémités de l'axe polaire. La sphère est la surface de l'onde ordinaire; l'ellipsoïde est la surface de l'onde extraordinaire.

L'équation de la méridienne de l'onde extraordinaire est

$$(3) \qquad a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2.$$

En coordonnées polaires, elle devient

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\sin^2\theta.$$

Notons que

$$b = \frac{1}{n_o}, \qquad a = \frac{1}{n_e};$$

posons de plus

$$\rho = \frac{1}{\nu}.$$

Il vient

$$(4\ bis) \qquad (\nu^2 - n_o^2) = (n_e^2 - n_o^2)\sin^2\theta$$

ou approximativement

$$(4\ ter) \qquad \nu - n_o = (n_e - n_o)\sin\theta.$$

Nous avons fait $b = c$; dans ce cas, l'ellipse méridienne a b pour demi-axe polaire et a pour demi-axe équatorial.

Si $a < b$, la nappe sphérique est extérieure à la nappe ellipsoïdale et l'axe de révolution de cette dernière est le grand axe de l'ellipse : le cristal est dit *positif* ou *attractif*; n_e est plus grand que n_o. Au contraire, si $a > b$, la nappe sphérique est intérieure à la nappe ellipsoïdale et cette dernière est de révolution autour du petit axe; le cristal est *négatif* ou *répulsif*, et n_e est plus petit que n_o.

Au lieu d'employer des cristaux naturels, on peut avoir intérêt à construire des prismes composés, jouissant d'une biréfringence plus grande; tels sont les prismes de Rochon, de Wollaston, de Senarmont, de Nicol, de Foucault, de Hartnack, etc.

On appelle *lame d'un quart d'onde* ou d'une *demi-onde*

une lame mince cristalline qui introduit une différence de marche de $\frac{\lambda}{4}$ ou $\frac{\lambda}{2}$ entre le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire. On les fait le plus souvent en mica, qui se clive facilement en lamelles de toute épaisseur : c'est alors l'ordinaire qui est en retard sur l'extraordinaire.

CONSTANTES NUMÉRIQUES.

Cristaux uniaxes.

		n_o.	n_e.	Radiation.
+	Quartz	1,5442	1,5534	D.
+	Zircon	1,923	1,968	Rouge.
—	Spath	1,6585	1,4865	D.
—	Corindon	1,769	1,762	Jaune.
—	Tourmaline	1,6408	1,6203	Rouge.

Cristaux biaxes.

		Indice			
		maximum.	moyen.	minimum.	Radiation
+	Gypse	1,5297	1,5227	1,5206	Jaune.
+	Topaze	1,6211	1,6137	1,6116	D.
—	Aragonite ..	1,6859	1,6816	1,5301	D.
—	Borax	1,473	1,470	1,447	Jaune.
—	Feldspath ..	1,5260	1,5237	1,5190	Jaune.

Indices du spath et du quartz (Mascart).

	Spath.		Quartz.	
Raies.	n_o	n_e.	n_o.	n_e.
A	1,65012	1,48285	1,53902	1,54812
B	1,65296	1,48409	1,54099	1,55002
C	1,65446	1,48474	1,54188	1,55095
D	1,65846	1,48654	1,54423	1,55338
E	1,66354	1,48885	1,54718	1,55636
F	1,66793	1,49084	1,54966	1,55897
G	1,67620	1,49470	1,55429	1,56372
H	1,68330	1,49777	1,55816	1,56770

Valeurs de $\frac{\pm 1}{n_e - n_o}$.

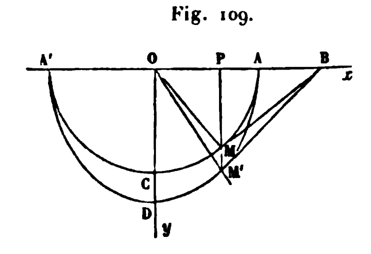
Spath	5,81
Quartz	109
Gypse	115
Mica	220
Tourmaline	48,8

APPLICATIONS.

1. *Une lame de spath, taillée parallèlement à l'axe, reçoit un rayon sous une incidence $i = 25°$: le plan d'incidence contient l'axe. Construire la direction des rayons réfractés et calculer les angles de réfraction r et r' des rayons ordinaire et extraordinaire.*

La *fig.* 109, sur laquelle le rayon incident n'est pas tracé, donne la direction des rayons réfractés OM et OM'; l'axe est projeté suivant Ox; ACA' est l'intersection de la sphère, sur-

Fig. 109.



face de l'onde ordinaire, par le plan d'incidence; ADA' est la méridienne de l'ellipsoïde extraordinaire; les rayons réfractés sont dans le plan d'incidence.

Les points M et M' étant sur une même perpendiculaire à l'axe Ox, on a

$$\frac{\tan r'}{\tan r} = \frac{PM}{PM'} = \frac{b}{a} = \frac{n_e}{n_o} = \frac{1,486}{1,658} = 0,895.$$

Mais

$$\sin r = \frac{\sin 25^\circ}{1,658},$$

$$r = 14^\circ 46' 3'',$$

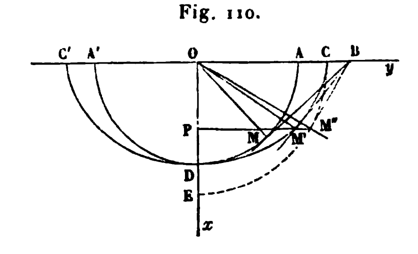
$$\text{tang}\, r' = 0,895 \,\text{tang}\, 14^\circ 46' 3'',$$

$$r' = 13^\circ 16' 27''.$$

2. *La face d'incidence d'un cristal de spath taillé est perpendiculaire à l'axe; elle reçoit un rayon de lumière faisant un angle de 36° avec la normale. On demande de construire et de calculer l'angle de réfraction r' du rayon extraordinaire.*

La solution graphique du problème est donnée par la *fig.* 110 : le plan d'incidence a été pris pour plan de figure; la section de la nappe ellipsoïdale est l'ellipse CDC' dont le

Fig. 110.



grand axe est dirigé suivant BO; la construction de Huygens est encore plane et OM est le rayon ordinaire, OM' le rayon extraordinaire.

Décrivons la circonférence CE, du point O comme centre avec un rayon $OC = a$, et menons par B une tangente BM'' à cette circonférence; les points M'' et M' seront sur une même perpendiculaire à l'axe Ox, et nous aurons

$$\frac{\text{tang}\, r'}{\text{tang POM}''} = \frac{\text{M}''\text{P}}{\text{M}'\text{P}} = \frac{a}{b}.$$

Mais

$$\sin \text{POM}'' = \frac{\text{OM}''}{\text{OB}} = a \sin i,$$

i étant l'angle d'incidence ; il vient donc

$$\tang r' = \frac{a \sin \mathrm{POM}''}{b \cos \mathrm{POM}''} = \frac{a^2 \sin i}{b\sqrt{1 - a^2 \sin^2 i}} = \frac{n_o \sin i}{n_e \sqrt{n_e^2 - \sin^2 i}}$$

$$= \frac{1,658 \times \sin 36^\circ}{1,486\sqrt{1,486^2 - \sin^2 36^\circ}}$$

$$r' = 25^\circ 40' 8''.$$

3. *Calculer l'épaisseur d'une lame quart d'onde de quartz taillée à 45° de l'axe, en lumière jaune* (¹).

Le retard des deux rayons est égal à un quart d'onde après la traversée de la lame, mais les deux rayons restent confondus dans leur marche.

Évaluons leur différence de marche δ ; ν étant l'indice extraordinaire à 45° de l'axe, nous aurons

$$\delta = (\nu - n_o)\, e = \frac{\lambda}{4}.$$

Or

(4 *ter*) $$\nu = n_o + (n_e - n_o) \sin 45^\circ.$$

Nous connaissons dès lors l'épaisseur cherchée e :

$$\left(\frac{n_e - n_o}{\sqrt{2}}\right) e = \frac{\lambda}{4},$$

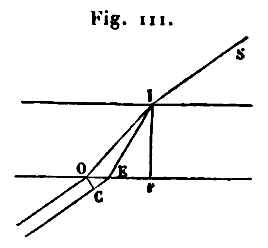
$$e = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\,(n_e - n_o)} = \frac{0,0005893}{2\sqrt{2}\,(1,5534 - 1,5442)} = 0^{\mathrm{mm}},022.$$

4. *Un faisceau de lumière parallèle tombe sur une lame de zircon, sous une incidence de 15° ; cette lame, qui est taillée parallèlement à l'axe, a 1ᵐᵐ d'épaisseur ; le plan d'incidence est dans la section principale du cristal. Quelle est la différence de marche des deux rayons ?*

(¹) Ce problème a été proposé aux candidats à la licence à la session de novembre 1887 de la Faculté de Paris.

Soient SI le rayon incident (*fig.* 111), IO et IE les deux

Fig. 111.



rayons réfractés, ordinaire et extraordinaire ; le cristal est attractif.

Estimons la différence des chemins en fonction de l'air ; nous aurons

$$\delta = e\left[\frac{n_e}{\cos r'} - \frac{n_o}{\cos r} + (\operatorname{tang} r - \operatorname{tang} r')\sin i\right].$$

Mais on voit sans peine que

$$\frac{n_o}{\cos r} - \operatorname{tang} r \sin i = n_o\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n_o^2}}.$$

De même,

$$\frac{n_e}{\cos r'} - \operatorname{tang} r' \sin i = n_e\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n_e^2}}.$$

Il vient, par suite,

$$\delta = e\left(n_e\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n_e^2}} - n_o\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n_o^2}}\right)$$

$$= e(n_e - n_o)\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n_o^2}}$$

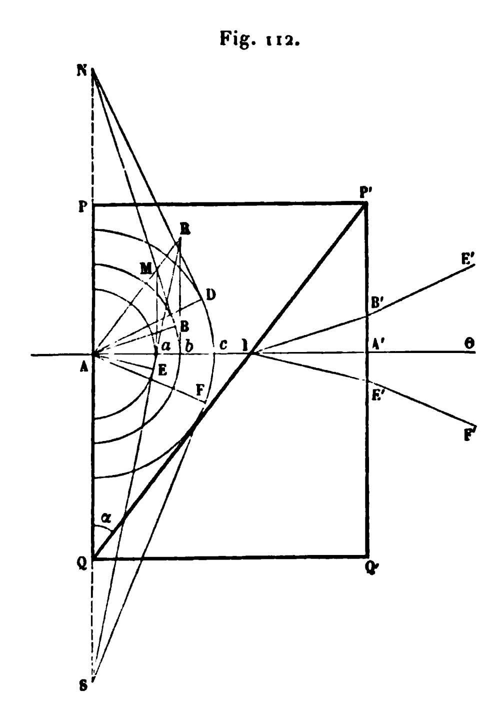
$$= e(1,968 - 1,923)\sqrt{1 - \frac{\sin^2 15^\circ}{\overline{1,923}^2}} = 0^{mm},043.$$

5. *Calculer l'angle de duplication d'un prisme de Rochon. sachant qu'il est fait de deux prismes de spath, dont l'angle*

de réfringence α est égal à 36°; *le rayon sera pris en incidence normale.*

L'épure de la *fig.* 112 permet de suivre la construction graphique d'Huygens, qui donne les rayons émergents A'O et B'E' : nous avons pris $Aa = \frac{1}{n_o}$, $Ab = \frac{1}{n_e}$ et AC = 1. La ligne AR est parallèle à P'Q; on a mené d'abord une tangente en *a* au cercle ordinaire, et, après l'avoir prolongée en M, on a tracé la tangente MB au cercle ordinaire; le rayon ordinaire, réfracté extraordinairement, a donc la direction AB. Pour

Fig. 112.



l'émergence par la face P'Q', on a tracé les tangentes NB et ND : AD donne la direction du rayon B'E'. Quant au rayon ordinaire, il émerge sans déviation.

Soient *i* l'angle d'incidence du rayon AI sur la face de col-

lage des deux prismes, ρ l'angle de réfraction, i' l'angle d'incidence sur P′Q′ et ε l'angle d'émergence; on peut écrire

$$\frac{\sin i}{\sin \rho} = \frac{n_e}{n_o}, \qquad \frac{\sin i'}{\sin \varepsilon} = \frac{1}{n_e}.$$

De plus,

$$i = \alpha \qquad i' = \rho - \alpha;$$

par suite,

$$\sin \varepsilon = n_e \sin(\rho - \alpha)$$

et

$$\sin \rho = \frac{n_o}{n_e} \sin \alpha.$$

On peut donc calculer ε (¹).

Il vient

$$\rho = 40^\circ 58' 31'',$$
$$i' = 4^\circ 58' 31'',$$
$$\varepsilon = 7^\circ 24' 17''.$$

Nous avons supposé au mastic un indice égal à l'indice extraordinaire; c'est le plus souvent de la térébenthine en couche infiniment mince.

La même *fig.* 112 donne la construction des deux rayons également déviés que fournit un prisme de Wollaston.

6. *Un compensateur de Babinet est formé de deux prismes de quartz, dont l'angle commun est égal à* 15′; *leurs faces extérieures sont parallèles à l'axe, mais les sections principales sont croisées. De quelle longueur devra-t-on faire glisser ces prismes l'un sur l'autre pour compenser un quart de longueur d'onde en lumière jaune?*

Les longueurs d'onde de la lumière jaune sont, dans le

(¹) Par élimination de ρ entre les deux équations, on trouverait:

$$\sin \varepsilon = \frac{\sin \alpha}{n_o}\left(\sqrt{1 - \frac{n_o^2}{n_e^2}\sin^2\alpha} - \frac{n_o}{n_e}\cos\alpha\right).$$

quartz, pour les rayons ordinaire et extraordinaire,

$$\frac{0^{mm},0005893}{1,5442} = 0^{mm},000381 = \lambda_o$$

et

$$\frac{0^{mm},0005893}{1,5534} = 0^{mm},000379 = \lambda_e.$$

Par millimètre de quartz, il y a

$$\frac{1}{0,000381} \quad \text{et} \quad \frac{1}{0,000379}$$

longueurs d'onde, soit

$$2624,7\,\lambda_o \quad \text{et} \quad 2638,5\,\lambda_e;$$

la différence est égale à

$$13,8.$$

Donc, 1^{mm} d'épaisseur introduit une différence de marche égale à $13,8\,\lambda$; l'épaisseur de quartz correspondante à $\frac{\lambda}{4}$ est donc égale à

$$\frac{1}{4 \times 13,8}.$$

Mais le déplacement longitudinal l est facile à déduire de la variation d'épaisseur nécessaire, car $l = \frac{e}{\operatorname{tang}\alpha}$; il vient donc, pour le déplacement cherché x,

$$x = \frac{1}{4 \times 13,8 \times \operatorname{tang} 15'} = 4^{mm},152.$$

CHAPITRE IV.

POLARISATION.

Un rayon polarisé rectilignement est un rayon dont la vibration est orientée : il en résulte une dissymétrie dans les phénomènes et la lumière ne présente pas les mêmes propriétés dans les divers azimuts que l'on considère suivant sa direction. On la dit polarisée dans le plan qui est perpendiculaire à la direction des vibrations.

La lumière se polarise par réflexion sur certains miroirs sous un angle déterminé (35°25′ pour le verre), par transmission à travers une pile de glace, et par double réfraction. Les mêmes instruments qui font l'office de *polariseurs* peuvent devenir des *analyseurs*, par lesquels on reconnaît la polarisation en même temps qu'on détermine la direction du plan de polarisation.

Fresnel a établi une théorie mécanique des phénomènes de la réflexion et de la réfraction vitreuse; il a été conduit à des relations entre la direction du plan de polarisation et l'intensité I des rayons réfléchis ou réfractés. Ces résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

1° *Lumière polarisée dans le plan d'incidence.*

Réflexion...... $$I = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)},$$

Réfraction..... $$I = 1 - \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}.$$

2° *Lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.*

Réflexion...... $$I = \frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)},$$

Réfraction..... $$I = 1 - \frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}.$$

3° *Lumière polarisée dans un azimut* α (α est l'angle du plan de polarisation avec le plan d'incidence).

Réflexion.. $\mathrm{I} = \dfrac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}\cos^2\alpha + \dfrac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}\sin^2\alpha,$

Réfraction. $\mathrm{I} = \left[1 - \dfrac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}\right]\cos^2\alpha + \left[1 - \dfrac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}\right]\sin^2\alpha.$

4° *Lumière naturelle.*

Réflexion.. $\mathrm{I} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \dfrac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}\right],$

Réfraction. $\mathrm{I} = \dfrac{1}{2}\left[1 - \dfrac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}\right] + \dfrac{1}{2}\left[1 - \dfrac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}\right].$

La loi de Brewster découle de cette théorie :

L'angle de polarisation est celui dont la tangente est égale à l'indice de réfraction.

Nous retrouvons une loi formulée par Arago :

Les rayons réfléchi et réfracté sont complémentaires et l'excès de lumière polarisée dans le plan d'incidence par réflexion est égal à l'excès de lumière polarisée perpendiculairement par réfraction.

Enfin Brewster avait découvert un fait que la théorie a expliqué : quand la lumière est polarisée dans un azimut α, la réflexion fait tourner le plan de polarisation; le nouvel azimut de polarisation α' du rayon est donné par l'équation

$$\tan\alpha' = \frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)}\tan\alpha.$$

Le facteur $\dfrac{\cos(i-r)}{\cos(i+r)}$ est égal à 1 pour $i=0$; il décroît quand i augmente, devient nul quand $(i+r)=90°$, et prend ensuite une valeur négative; il repasse par l'unité quand $i=90°$. Le plan de polarisation de la lumière réfléchie est donc confondu avec celui de la lumière incidente pour la réflexion normale; il se rapproche ensuite du plan d'inci-

dence et se confond avec lui sous l'angle de polarisation; il s'en écarte de l'autre côté et acquiert une valeur égale et contraire à α, quand $i = 90°$.

La réfraction produit aussi une rotation analogue, mais on a

$$\cot \alpha' = \cos(i - r) \cot \alpha.$$

Nous n'avons considéré jusqu'ici que des vibrations orientées rectilignes; mais on peut obtenir des vibrations elliptiques ou circulaires, en composant deux vibrations rectilignes quelconques présentant une différence de phase déterminée δ. Si δ est égal à zéro, on obtient une vibration rectiligne: δ augmentant, de zéro à $\frac{\pi}{2}$, la vibration est elliptique; pour $\delta = \frac{\pi}{2}$, le petit axe de l'ellipse est maximum, et, au cas où les amplitudes seraient égales et les vibrations composantes rectangulaires, la trajectoire de la molécule deviendrait circulaire; δ augmentant de $\frac{\pi}{2}$ à π, l'ellipse prend des positions symétriques des précédentes et, pour $\delta = \pi$, elle redevient une droite. De $\delta = \pi$ à $\delta = 2\pi$, on repasse par les mêmes variations, mais le sens de la vibration change; elle sera de gauche à droite ↗ si, dans la première période, elle était de droite à gauche ↘ (1).

Le passage à travers une lame cristalline biréfringente, la réflexion totale dans le verre, la réflexion métallique donnent naissance à des rayons polarisés elliptiquement : on étudie expérimentalement leur nature elliptique ou circulaire et l'on détermine la position et le rapport des axes de l'ellipse, à l'aide des compensateurs.

Le Tableau ci-après donne le sens dans lequel l'ellipse ou le cercle de vibration est parcouru par la molécule vibrante.

---

(1) On démontre dans le Cours que toute vibration elliptique peut être considérée comme produite par deux vibrations rectilignes différant de $\frac{\lambda}{4}$, dirigées suivant les axes, dont les intensités sont égales aux carrés de ces axes.



Cristal positif.

$\delta = 0$ à $\frac{\lambda}{2}$....... vibration de gauche à droite.

$= \frac{\lambda}{2}$ à λ........ vibration de droite à gauche.

Cristal négatif.

$\delta = 0$ à $\frac{\lambda}{2}$....... vibration de droite à gauche.

$= \frac{\lambda}{2}$ à λ........ vibration de gauche à droite.

La droite est celle d'un observateur couché dans le rayon et regardant la molécule vibrante.

Le quartz jouit de la propriété de faire tourner le plan de polarisation d'une quantité directement proportionnelle à son épaisseur, et inversement proportionnelle au carré de la longueur d'onde : c'est un phénomène de *polarisation rotatoire*.

Le quartz doit son *activité* à sa structure cristalline; la molécule de silice est par elle-même inactive; nous en dirons autant du cinabre, de l'acétate d'urane, du chlorate de soude, etc. Mais un grand nombre de substances, naturellement liquides ou bien solubles dans un liquide inactif, exercent sur la lumière polarisée une action semblable à celle du quartz. Ces substances sont évidemment douées d'un pouvoir rotatoire moléculaire.

Biot a fait observer que, dans ce dernier cas, la déviation du plan de polarisation produite par une colonne liquide devait être proportionnelle au nombre des molécules traversées par le rayon lumineux, et par suite à la longueur de la colonne liquide et à la densité de la substance active. C'est ainsi qu'on peut écrire

$$\pm[\alpha]_j = \frac{\alpha}{ld} = \frac{\alpha}{l\varepsilon\delta} = \frac{\alpha}{l}\frac{V}{p};$$

dans ces formules, $[\alpha]$ est le pouvoir rotatoire moléculaire + ou — (↗ ou ↘) pour la couleur jaune, α la rotation observée, l la longueur du tube, d la densité du corps, δ celle

de la dissolution, ε la proportion de substance active par unité de poids, V le volume de la dissolution contenant un poids p de substance active.

CONSTANTES NUMÉRIQUES.

Angles de la polarisation brewstérienne.

Spath fluor blanc	55°. 6′,7
Crown	56.36,0
Diamant	22.54,0
Eau	36.58,0
Huile	34.30.0

Pouvoirs rotatoires.

[Par millimètre de longueur en lumière jaune (Landolt)].

Quartz	21°,67	D
Cinabre	325	D
Chlorate de soude	3,67	jaune moyen.
Acétate d'urane et de soude.	1,8	jaune moyen.

Pouvoirs rotatoires moléculaires

[Par décimètre de longueur en lumière jaune (Buignet)].

Sucre de canne	+ 73°,8′
Sucre de lait	+ 60,2
Glucose d'amidon	+ 53,0
Lévulose	−106,0
Sucre interverti à 15°	− 26,5
Dextrine	+138,7
Atropine	− 14,5
Morphine	−113,8
Quinine	−165,2
Sulfate de quinine	−193,0

Les chiffres ci-dessus ont été déterminés par la teinte sensible. On trouvera la rotation par rapport à la raie D en prenant les $\frac{8}{9}$ des valeurs assignées au jaune moyen.

Influence de la concentration et du dissolvant.

		Poids en grammes p de substance active dans 100^{gr} de solution.	Pouvoirs rotatoires $[\alpha]_D$.
Sucre de canne.	Eau	0 à 18	$+66,5$
		18 à 69	$66,386 + 0,01503\,p - 0,000399\,p^2$
	Alcool : 6		$+66,7$
Glucose.	Eau : 1 à 100		$47,73 + 0,01553\,p + 0,000390\,p^2$

APPLICATIONS.

1. *La lumière se polarise complètement par réflexion sur une lame de verre noir, sous l'incidence de 54° 45'; quel est l'indice de réfraction de ce verre?*

$$\operatorname{tang} I = n,$$
$$n = 1,425.$$

2. *Un rayon de lumière parallèle tombe sur une lame de verre, sous un angle d'incidence égal à 30°; il est polarisé à 45° du plan d'incidence; le verre a un indice égal à 1,425. Comment est orienté le plan de polarisation du rayon réfléchi?*

Nous avons vu que

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)}\operatorname{tang}\alpha.$$

Calculons r :

$$\sin r = \frac{1}{n}\sin i,$$
$$r = 20^\circ 32' 30'';$$

d'où

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{\cos 50^\circ 32' 30''}{\cos 9^\circ 27' 30''}\operatorname{tang}\alpha,$$
$$\alpha' = 32^\circ 47' 40''.$$

Le plan de polarisation du rayon réfléchi s'est rapproché

du plan d'incidence; il se serait confondu avec lui, si l'incidence avait été égale à 34°45'.

3. *Supposons, dans l'exercice précédent, un faisceau incident à l'état naturel. On demande de déterminer la quantité de lumière polarisée contenue dans le rayon réfléchi.*

$$I = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}\cos^2\alpha + \frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}\sin^2\alpha.$$

Cette formule nous donne l'intensité du rayon réfléchi : joignons-y l'équation

$$\tan\alpha' = \frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)}\tan\alpha.$$

La quantité de lumière polarisée du plan d'incidence est égale à la différence des quantités de lumière polarisée dans le plan d'incidence et dans un plan perpendiculaire : désignons cette quantité par q.

$$q = I(\cos^2\alpha' - \sin^2\alpha') = I(1 - 2\sin^2\alpha') = \left(\frac{1-\tan^2\alpha'}{1+\tan^2\alpha'}\right)$$

$$= \left[\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}\cos^2\alpha + \frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}\sin^2\alpha\right]$$

$$\times \frac{\cos^2(i-r) - \tan^2\alpha\cos^2(i+r)}{\cos^2(i-r) + \tan^2\alpha\cos^2(i+r)}.$$

Mais $\alpha = 45°$.

La valeur de q devient par conséquent

$$q = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}\right]$$

$$\times \frac{\cos^2(i-r) - \cos^2(i+r)}{\cos^2(i-r) + \tan^2\alpha\cos^2(i+r)}.$$

4. *Un rayon complètement polarisé est transmis à travers une lame mince de quartz parallèle à l'axe; la section principale de cette lame fait un angle* $\varphi = 20°$ *avec le plan de po-*

larisation du rayon incident. A quel état se trouve le rayon après sa transmission à travers la lame?

Le rayon est formé de deux portions polarisées à angle droit, l'une égale à $\cos^2\varphi$, dans le plan de la section principale, l'autre égale à $\sin^2\varphi$, dans le plan perpendiculaire à la section principale; le rayon contient donc une quantité égale à $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$ polarisée dans le plan de la section principale.

$$\cos 2\varphi = 0,766.$$

5. *Un quartz, taillé parallèlement à l'axe, de* $0^{mm},085$ *d'épaisseur, est placé à* 45° *entre un polariseur et un analyseur dont les sections principales sont parallèles : on observe dans le spectre les franges de MM. Fizeau et Foucault. Combien comptera-t-on de franges entre deux longueurs d'onde,* $\lambda' = 6,665 \times 10^{-5}$ *et* $\lambda'' = 4,845 \times 10^{-5}$, *sachant que les différences correspondantes des indices* $n_o - n_e$ *sont* $9,0125 \times 10^{-3}$ *et* $9,2852 \times 10^{-3}$?

Soit p le numéro d'ordre de la première frange : on doit avoir

$$(n'_o - n'_e)e = p\,\frac{\lambda}{2};$$

on trouve, tous calculs faits,

$$p = 163,2,$$

le nombre devant être entier et impair; puisque les sections sont parallèles, nous admettrons le nombre 163 comme valeur exacte.

Appelons $\frac{x}{2}$ le nombre de franges inconnu; x doit satisfaire à la relation évidente

$$\frac{(n''_o - n''_e)}{n'_o - n'_e}\,\frac{\lambda'}{\lambda''} = \frac{p + x}{p}.$$

On en déduit

$$\frac{9,2852}{9,0125} \times \frac{6665}{4845} = \frac{163 + x}{163},$$

d'où

$$x = 68.$$

Nous avons emprunté les valeurs numériques de cet exercice à un travail de M. Macé de Lépinay.

6. *Entre deux nicols à l'extinction, on place une lame de mica et l'on observe une coloration qui répond au pourpre du premier ordre de la Table chromatique de Newton. Calculer l'épaisseur de cette lame.*

Cette couleur correspond au rayon extraordinaire : si l'on fait coïncider les sections principales de l'analyseur et du polariseur, l'image extraordinaire passera par la série des teintes des anneaux réfléchis de Newton, à partir du noir pour une épaisseur nulle de la lame.

En admettant l'incidence normale, nous aurons

$$\frac{O - E}{\lambda} = e\,\frac{n'_e - n_o}{\lambda},$$

d'où

$$e = \frac{O - E}{n'_e - n_o} = \frac{K}{n_e - n_o}.$$

Les cristaux sont des générateurs de retard $\frac{1}{n_e - n_o}$ fois moins énergiques que l'air. Or l'air donnerait le pourpre du premier ordre pour une épaisseur de 0,000565; l'épaisseur de mica sera donc

$$\frac{0,000565}{n_o - n_e} = 0,000565 \times 220 = 0^{mm},124.$$

7. *Quelles colorations présentera une lame de quartz, taillée parallèlement à l'axe, de* $0^{mm},1235$ *d'épaisseur, quand on la placera sur le support de l'appareil de Norremberg ou sur la glace inférieure?*

Dans l'image extraordinaire, l'épaisseur d'air correspondante à $0^{mm},1235$ sera

$$\frac{0,1235}{109} = 0,001128.$$

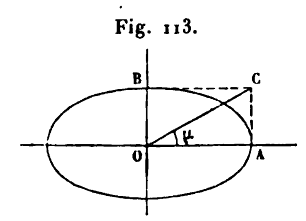
La couleur de l'image sera violet clair; c'est précisément cette couleur qu'on appelle la *teinte de passage*.

Dans l'image ordinaire, nous observerons un vert jaunâtre.

Sur la glace inférieure, on obtiendrait la teinte de l'épaisseur double, dont la valeur serait 2256, teinte vague, non classée par Newton, et par suite indéfinissable : c'est ainsi qu'on distinguera le violet de second ordre du premier.

8. *Un rayon polarisé elliptiquement traverse un mica quart d'onde; on le reçoit sur un analyseur et l'on observe que, pour une orientation déterminée* OA (*fig.* 113) *de la*

Fig. 113.



section principale du quart d'onde, le rayon présente les caractères d'un rayon polarisé rectilignement : la section principale de l'analyseur faisant un angle $\mu = 32^\circ$ *avec* OA, *l'image ordinaire est nulle. On demande la position des axes de l'ellipse et le rapport de grandeur de ces axes.*

Un des axes de l'ellipse coïncide avec la section principale de la lame quart d'onde; de plus,

$$\tang \mu = \frac{OB}{OA} = \frac{b}{a} = 0,625.$$

C'est le rapport des grandeurs des axes : nous venons d'appliquer le procédé de de Senarmont.

9. *Un compensateur de Babinet a été gradué; en lumière jaune, un déplacement de* $16^{mm},608$ *compense une longueur d'onde, c'est-à-dire que, entre deux nicols, ce déplacement amène sous le fil du réticule deux franges noires à la suite l'une de l'autre. Un rayon elliptique tombant sur le compensateur, on fait tourner d'abord le nicol analyseur de manière que les franges acquièrent leur maximum d'intensité; puis on fait avancer un des prismes du compensateur, de* 6^{mm}, *jusqu'à ce qu'une frange tombe sous le fil. Quelle est la direction des axes de l'ellipse et quel est le rapport de grandeur de ces axes?*

Un des axes coïncide avec la section principale de l'analyseur : la différence de marche des deux rayons composants est égale à $\frac{6}{16,608}\lambda = 0,36\lambda$. Enfin le rapport de grandeur des axes est égal à la tangente de l'angle formé par la section principale de l'analyseur avec le plan principal du compensateur.

C'est le procédé de Jamin.

10. *On a fait dissoudre* 4^{gr} *de sulfate de quinine dans l'eau distillée; on ajoute quelques gouttes d'eau acidulée par l'acide sulfurique, et l'on complète le volume à* 100^{cc}. *L'observation se fait au polarimètre de Biot, dans un tube de* 20^{cm} *de longueur : le plan de polarisation a tourné, dans la lumière jaune, de* $15°27'$. *Déduire de cette expérience le pouvoir rotatoire du sulfate de quinine.*

$$15°27' = 15°,45.$$

$$[\alpha]_j = \frac{\alpha}{l}\frac{V}{p} = \frac{15,45}{2} \times \frac{100}{4} = 193°,125.$$

On aurait $[\alpha]_D$ en multipliant le résultat par $\frac{8}{9}$.

11. *Un sirop de sucre de canne donne, à l'appareil de Biot, une déviation* $\alpha = 41°,28$, *avec un tube de* 50^{cm} *de longueur : quel est le poids de sucre contenu dans* 1^{lit} *de ce sirop?*

$$p = \frac{\alpha V}{l[\alpha]_j}.$$

La teinte sensible correspond, en effet, à la déviation dans le jaune moyen :

$$p = \frac{41,28}{5} \times \frac{1000}{73,8} = 111^{gr},87.$$

12. *Un sirop contient du sucre de canne mêlé avec d'autres substances actives quelconques : dans un tube de longueur* $l = 20^{cm}$, *on a observé une rotation* $\alpha = +31°,6$; *la densité de la dissolution est* $\delta = 1,32$. *On opère l'interversion et l'on observe alors une déviation* α' *de même sens égale à* $+3°,4$. *Quelle est la quantité* ε *de sucre cristallisable contenue dans l'unité de poids du sirop?*

Appliquons la formule

$$[\alpha] = \frac{\alpha}{l\varepsilon\delta}.$$

Dans le premier cas, nous avons

$$\alpha = [\alpha]\, l\varepsilon\delta + \mathrm{K},$$

K étant la rotation produite par les substances actives mêlées à la dissolution; elles restent inaltérées dans l'interversion, et nous avons, dans la seconde observation,

$$+\alpha' = -[\alpha_1]\, l\varepsilon\delta + \mathrm{K},$$

d'où

$$(\alpha - \alpha') = l\varepsilon\delta([\alpha_1] + [\alpha])$$

et

$$\varepsilon = \frac{\alpha - \alpha'}{l\delta([\alpha_1] + [\alpha])}$$
$$= \frac{31,6 - 3,4}{2 \times 1,32\,(73,8 + 26,5)} = 0,106.$$

Il importe d'observer que, si la proportion de sucre droit avait été plus grande, la seconde observation aurait donné une valeur négative de α', laquelle aurait dû être ajoutée à α.

C'est par un calcul analogue que Clerget a établi ses Tables, qui sont d'un grand usage en saccharimétrie : nous en avons donné un extrait à la page 461 de notre *Traité de manipulations*.

CHAPITRE V.

ACOUSTIQUE.

Le son est produit par le mouvement vibratoire périodique d'un corps, transmis à notre oreille par l'intermédiaire d'un milieu élastique : le mouvement est d'amplitude finie, directement observable, et le milieu est pondérable ; voilà deux différences capitales entre le son et la lumière.

Ce mouvement et, par suite, le son se propagent avec une vitesse uniforme $V = \sqrt{\frac{e}{d}}$, e étant le coefficient d'élasticité du milieu et d sa densité.

Pour les gaz, e est le quotient d'un accroissement de pression Δp par une diminution de volume Δv [1] : or appelons P et $P + p$ les pressions initiale et finale, v et $v - v'$ les volumes initial et final, nous aurons

$$e = \frac{p}{\frac{v'}{v}} = p\,\frac{v}{v'}.$$

Si la compression pouvait se faire à température constante. il serait permis d'écrire

$$e = P, \quad \text{car} \quad \frac{p}{P} = \frac{v'}{v};$$

donc

$$V = \sqrt{\frac{P}{d}}.$$

[1] On peut dire encore que c'est le rapport d'un accroissement de pression à la condensation correspondante.

Mais, P et d étant évalués en unités mécaniques, on a

$$P = mgh \qquad \text{et} \qquad d = 0,001293\,\delta\,\frac{h}{H}\,\frac{1}{1+\alpha t},$$

en appelant h la hauteur barométrique actuelle et H la hauteur normale, m la masse de l'unité de volume du mercure, et δ la densité du gaz rapportée à l'air ; nous ferons $g = 981$ et les hauteurs h et H seront mesurées en centimètres.

Par suite,

$$V = \sqrt{\frac{mg}{0,001293 \times \delta}\,H(1+\alpha t)} = \sqrt{\frac{13,596 \times 981}{0,001293 \times \delta} \times 76(1+\alpha t)},$$

valeur indépendante de la pression h.

Dans l'air,

$$V = 28000\sqrt{1+\alpha t} \text{ centimètres.}$$

C'est la formule de Newton.

Or l'expérience donne

$$V = 33240\sqrt{1+\alpha t}.$$

D'où provient ce désaccord ?

Laplace en découvrit la cause dès 1816 : la compression est si rapide que la chaleur produite ne peut se perdre et la compression ne s'effectue pas à température constante, mais on doit considérer la transformation comme adiabatique ; posons donc $pv^{\gamma} =$ const., et non pas $pv =$ const.

On a pour lors

$$\frac{p}{P} = \gamma\,\frac{v'}{v}, \quad \text{d'où} \quad e = \gamma P$$

et

$$(1) \qquad \begin{cases} V = \sqrt{\gamma\dfrac{P}{d}} = \sqrt{\dfrac{mg\gamma}{0,001293 \times \delta}\,H(1+\alpha t)} \\ \quad = 33240\sqrt{1+\alpha t} = 33240 + 60\,t. \end{cases}$$

La formule rationnelle n'est approximative et elle ne peut être appliquée que dans les limites des variations atmosphériques.

La formule exacte concorde si bien avec les faits qu'elle a permis de déterminer sûrement la valeur de γ.

La vitesse v du mouvement vibratoire est donnée par la formule

$$v = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

trouvée et étudiée déjà en Optique. Les ondes sonores se propagent comme les ondes lumineuses; $\lambda = VT = \frac{V}{N}$ est leur longueur; elles interfèrent, se diffractent et se composent de même, et donnent ainsi naissance à des mouvements fort complexes, dont M. Lissajous a fait une remarquable étude géométrique et expérimentale.

Les *battements* sont produits par la superposition de deux vibrations de périodes inégales, mais dont la différence est très petite; *le nombre des battements par seconde est égal à la différence des nombres des vibrations des sons considérés.* Mais Tartini a découvert que du concours de deux sons distants de moins d'une octave peut naître un troisième son, dont le nombre des vibrations est précisément la différence des nombres des vibrations des deux sons combinés: ce son, appelé *son résultant,* est donc produit par les battements.

Bernoulli a donné une remarquable théorie des tuyaux sonores, basée sur l'étude des mouvements vibratoires dans les tuyaux; à une distance d de l'ouverture, la vitesse vibratoire v a pour valeur $\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right)$ et la *condensation* en ce même point est égale au quotient de v par V la vitesse du son. Ces vitesses et ces condensations se superposent avec les ondes directe et réfléchie, et produisent des ventres et des nœuds fixes et, par suite, une segmentation déterminée de l'air du tuyau, de laquelle résulte la hauteur du son produit. Pour un tuyau fermé, on a $N = (2n - 1)\frac{V}{4L}$, n étant le nombre de fois que la longueur L contient la demi-distance de deux internœuds $\frac{\lambda}{4}$; pour un tuyau ouvert, $N = 2n \frac{V}{4L}$. Dans le premier

cas, les harmoniques suivent la loi des nombres impairs; dans le second, la suite des nombres naturels.

Les lois de Bernoulli, relatives à la propagation des ondes dans un cylindre limité, s'appliquent aux cylindres solides; c'est ainsi qu'on a pu formuler les lois des *vibrations longitudinales* des verges et des cordes : suivant l'encastrement, on a

$$N = (2n - 1)\frac{V}{4L} \tag{2}$$

ou bien

$$N = 2n\frac{V}{4L}. \tag{3}$$

Dans les solides et les liquides, la vitesse de propagation des ondes est donnée exactement par la formule de Newton :

$$V = \sqrt{\frac{e}{d}} = \sqrt{\frac{g}{\varepsilon}},$$

ε étant l'allongement produit sur une barre tendue par son poids.

On aurait encore

$$V = \sqrt{g\frac{e}{D}}\ (^1). \tag{4}$$

L'étude des *vibrations transversales* est plus difficile : $\mathfrak{T}$ étant la tension de la corde, et δ la masse de l'unité de longueur, on démontre que

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\mathfrak{T}}{\delta}\frac{d^2y}{dx^2} = V'^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Nous appelons y l'élongation et x la distance d'un élément à l'origine de la corde : on en déduit par intégration

$$y = f(x + V't) + f'(x - V't);$$

---

(1) En effet, D, le poids spécifique du solide, est égal à gd, et

$$\varepsilon = \frac{D}{e} = \frac{gd}{e},$$

d'où

$$\frac{e}{d} = \frac{g}{\varepsilon}.$$

V′ est la vitesse égale à

$$\frac{\mathcal{E}}{\delta}=\frac{gP}{sD}; \tag{5}$$

D est le poids spécifique, *s* la section de la corde et P le poids tenseur. Il vient finalement

$$N=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{gP}{sD}}. \tag{6}$$

CONSTANTES NUMÉRIQUES.

Intervalles musicaux.

Notes.	Gamme harmonique.		Gamme tempérée. ($\sqrt[12]{2}$).
Ut	1	1	1,000
Ut♯		1,042	1,060
Ré♭		1,080	
Ré	$\frac{9}{8}$	1,125	1,122
Ré♯		1,172	1,190
Mi♭		1,200	
Mi	$\frac{5}{4}$	1,250	1,260
Mi♯		1,280	
Fa♭		1,302	1,334
Fa	$\frac{4}{3}$	1,333	
Fa♯		1,389	1,414
Sol♭		1,440	
Sol	$\frac{3}{2}$	1,500	1,498
Sol♯		1,563	1,587
La♭		1,600	
La	$\frac{5}{3}$	1,667	1,682
La♯		1,736	1,782
Si♭		1,800	
Si	$\frac{15}{8}$	1,875	1,887
Si♯		1,920	
Ut♭		1,953	2,000
Ut	2	2,000	

Nombres absolus des vibrations.

Notes.	La_3 435 vibrations doubles.	La_3 426 ½ vibrations doubles.
Ut_{-2}	16,3125	16
Ut_{-1}	32,625	32
Ut_1	65,25	64
Ut_2	130,50	128
Ut_3	261,00	256
Ut_4	522,00	512
Ut_5	1044,00	1024
Ut_6	2088,00	2048
Ut_7	4176,00	4096
Ut_8	8352,00	8192

Vitesse du son dans les métaux (Wertheim, *à* 20°).

Plomb	$1,23 \times 10^{5cm}$
Argent	2,61
Cuivre	3,56
Fer	5,13
Acier	4,99

Dans l'eau, Colladon a trouvé $1,435 \times 10^{5cm}$ à 8°.

Vitesse du son dans les gaz à 0°.

Oxygène	$3,17 \times 10^{4cm}$
Hydrogène	12,69
Acide carbonique	2,62
Vapeur d'eau	4,01

APPLICATIONS.

1. *La vitesse du son dans le chlore est égale à* $20\,640^{cm}$ *à zéro; calculer la valeur de* γ, *le rapport des chaleurs spécifiques, pour ce gaz.*

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma &= \frac{V^2 \times 0,001293\,\delta}{mgH} \\ &= \frac{\overline{20640}^2 \times 0,001293 \times 2,47}{13,596 \times 981 \times 76} = 1,34. \end{aligned} \right.$$

2. *Quelle est la vitesse théorique du son dans une tige de fer? On prendra e égal à* 20×10^8 *par centimètre carré.*

$$(2) \qquad V = \sqrt{\frac{g}{\varepsilon}} = \sqrt{g\frac{e}{D}} = \sqrt{\frac{981 \times 20 \times 10^8}{0{,}0078}} = 501500^{cm}.$$

3. *Déduire de l'expérience de Colladon le coefficient de compressibilité de l'eau* μ *à* 8°.

La compression de l'eau n'entraîne pas de variation thermique appréciable et nous devons appliquer la formule de Newton

$$(4) \qquad V = \sqrt{\frac{e}{d}}.$$

Or, le coefficient d'élasticité e de l'eau est le rapport de la variation de pression à la compression correspondante

$$e = \frac{P}{\mu} = \frac{mgh}{\mu}.$$

Donc

$$V = \sqrt{\frac{mgh}{\mu d}} = \sqrt{\frac{13{,}596 \times 981 \times 76}{\mu}}.$$

On en déduit, tous calculs faits,

$$\mu = 0{,}0000492.$$

L'expérience directe a donné, vers 4°, une valeur de μ égale à 0,0000499 : les deux résultats sont comparables.

4. *Un tuyau métallique donne l'*ut_4 *à zéro : sa longueur exacte est de* 13^m. *Dans une enceinte, à une température élevée, on observe que le tuyau ne contient plus que la moitié des longueurs d'onde : quelle est la température de l'enceinte?*

A zéro, la longueur d'onde de l'ut_4 est de $\frac{33300}{N}$, N étant le nombre de vibrations correspondant à la seconde; pre-

nons pour ut_1 64 vibrations doubles; nous trouvons, pour l'ut_4, 512 vibrations doubles, et $\lambda = \frac{33300}{512} = 650^{cm}$: le tuyau renferme donc 20 longueurs d'onde.

Pour que le tuyau n'en contienne plus que 10, il faut que la vitesse ait doublé, ce qui nous conduit à l'équation

$$\sqrt{(1 + \alpha t)} = 2,$$

$$t = \frac{4 - 1}{\alpha} = 818^\circ.$$

C'est ainsi qu'on a pu réaliser un pyromètre acoustique.

5. *On fait parler tour à tour un tuyau acoustique par l'air et par l'hydrogène; on constate d'abord que la position des nœuds et des ventres fixes est indépendante de la nature du gaz; mais le tuyau donne un* ut_3 *avec l'air et un* $si_4^\sharp$ *avec l'hydrogène: quel est le rapport des vitesses du son dans les deux gaz?*

(2) $$N = 2n\frac{V}{4L},$$

$$N' = 2n\frac{V'}{4L},$$

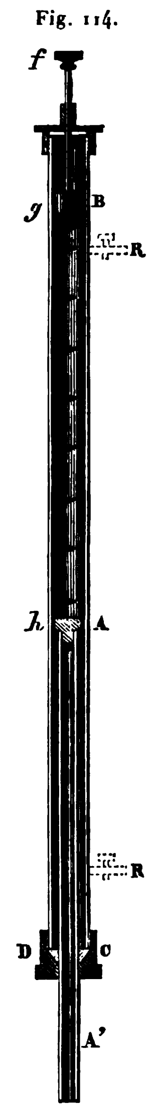
$$\frac{V'}{V} = \frac{N'}{N} = \frac{983}{256} = 3,81.$$

6. *Un tube de Kundt ayant été rempli d'air et saupoudré de silice amorphe parfaitement sèche, on excite longitudinalement la verge d'acier* AA' (*fig.* 114), *implantée dans son extrémité, mais saisie elle-même par son milieu en* C. *Après réglage du piston* B, *on mesure un intervalle* l *de* 48^{mm} *entre deux lignes nodales; la tige d'acier a une longueur* $L = 0^m,737$; *quelle est la vitesse du son dans l'air?*

$$\frac{x}{33240} = \frac{L}{l} = \frac{737}{48} = 15,34,$$

attendu que chaque concamération l est une demi-longueur

Fig. 114.



d'onde $\frac{\lambda}{2}$ du son dans l'air, tandis que L mesure la demi-lon-

gueur d'onde $\frac{\Lambda}{2}$ du même son dans l'acier :

$$x = 33240 \times 15,34 = 509901^{\text{cm}}.$$

7. *La guitare porte six cordes; les deux premières donnent* mi_3 *et* si_2, *la dernière* mi_1 ; *pourquoi cette corde vibre-t-elle. quand on pince les deux premières?*

Les vibrations de mi_3 et de si_2 peuvent être représentées par les nombres 4 et 3; le son résultant sera donc 1 et il est à l'unisson de mi_1.

8. *Le sifflet d'une locomotive donne le* la_3 ; *un observateur placé sur la voie entend un* $\text{si}^\flat_3$; *quelle est la vitesse de marche de la locomotive?*

Soient λ la longueur d'onde de la vibration émise et λ′ la nouvelle longueur d'onde du son perçu par l'observateur : appelons x la vitesse de translation du sifflet.

$$\lambda' = \lambda - \frac{x}{N} = \lambda\left(1 - \frac{x}{V}\right),$$

$$\frac{x}{V} = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda} = \frac{N' - N}{N'},$$

$$x = 33240\,\frac{461 - 427}{461} = 2452^{\text{cm}} = 24^{\text{m}},52 \text{ par seconde.}$$

9. *La chanterelle d'un violon a une masse de* $0^{\text{gr}},04$ *par centimètre de longueur; sa longueur libre est de* 33^{cm} ; *elle donne* 668 *vibrations doubles par seconde en vibrant dans sa totalité. Calculer la tension* $\mathfrak{G}$ *de cette corde en dynes.*

$$V' = \sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{d}}.$$

D'autre part,

(5 et 6) $V' = 2NL.$

Par conséquent,

$$\mathfrak{T} = d.4N^2L^2 = 0,04 \times 4 \times \overline{668}^2 \times \overline{33}^2 = 7,6 \times 10^7 \text{ dynes.}$$

FORMULES USUELLES.

FORMULES USUELLES.

FORMULES GÉOMÉTRIQUES.

Longueurs.

Carré : diagonale d en fonction du côté c :

$$d = c\sqrt{2}.$$

Polygone régulier : côté c en fonction des rayons R et r des cercles circonscrit et inscrit et du nombre n de ses côtés :

$$c = 2\mathrm{R}\sin\frac{180}{n} = 2r\,\mathrm{tang}\,\frac{180}{n}.$$

Circonférence : $2\pi r$.

Secteur de α degrés : $\dfrac{\pi r\alpha}{180}$.

Surfaces.

Cercle : $\pi r^2 = \dfrac{\pi \mathrm{D}^2}{4}$.

Ellipse : en fonction des demi-axes : πab.

Parabole : $\dfrac{2}{3}rh$.

Cylindre droit : $2\pi rh$; h est sa hauteur et r le rayon de base.
Cône : πrl; l est sa génératrice.
Tronc de cône : $\pi(r + r')l$.
Sphère : $4\pi r^2$.
Zone sphérique : $2\pi rh$; h est sa hauteur.
Calotte sphérique : $2\pi rh$; h est sa hauteur.

Volumes.

Pyramide : $\dfrac{\mathrm{S}h}{3}$; S est la surface de base et h la hauteur.

Cône : $\dfrac{\mathrm{S}h}{3}$.

Cylindre droit : Sh.

Tronc de pyramide : $\frac{1}{3}h(S+S'+\sqrt{SS'})$.

Tronc de cône : $\frac{1}{3}\pi h(r^2+r'^2+rr')$; r et r' sont les rayons des bases parallèles.

Tonneau : $\pi h[R-\frac{3}{8}(R-r)]^2$.

Sphère : $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{6}\pi D^3$.

Calotte sphérique : $\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$.

Ellipsoïde : $\frac{4}{3}\pi abc$; a, b, c sont les demi-axes.

FORMULES ALGÉBRIQUES

Progressions arithmétiques : $S=\frac{a+b}{2}n$; a est le premier terme, b le dernier et S la somme des n premiers termes.

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

Progressions géométriques : $S=a\frac{q^n-1}{q-1}$; a est le premier terme, q la raison et S la somme des n premiers termes.

Limite de la somme : $S=\frac{a}{1-q}$.

Arrangements de m objets n à n :

$$(m-n+1)(m-n+2)\ldots(m-1)m.$$

Permutations de m objets :

$$1.2.3.4\ldots(m-1)m.$$

Combinaisons de m objets n à n :

$$\frac{1.2.3\ldots(m-1)(m)}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots(m-n)}.$$

Formule du binôme de Newton :

$$(x+a)^m=x^m+mx^{m-1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}a^2+\ldots$$
$$+m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}a^n+\ldots+a^m.$$

Séries.

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.2.3} + \frac{3}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{n}{1.2.3\ldots(n+1)} + \ldots;$$

$$\lim\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e = 2,718281828459\ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

$$\lim\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \ldots,$$

$$\log'(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4}.$$

Équations du premier degré :

$$ax + by = c, \qquad x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'},$$

$$a'x + b'y = c', \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Équations du second degré :

$$x^2 + px + q = 0, \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$ax^2 + 2kx + c = 0, \qquad x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Équation bicarrée :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \qquad x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Équations binômes :

$$x^3 - 1 = 0 \left\{ \begin{aligned} x &= 1, \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}, \end{aligned} \right.$$

$$x^3 + 1 = 0 \left\{ \begin{aligned} x &= -1, \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}. \end{aligned} \right.$$

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \qquad \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{séc} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \qquad \operatorname{coséc} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha},$$

$$\operatorname{séc}^2 \alpha = 1 + \operatorname{tang}^2 \alpha, \qquad \operatorname{coséc}^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha,$$

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}}, \qquad \operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}};$$

$$\operatorname{tang}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha};$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \sin(\pi - x) = \sin x,$$

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x, \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x;$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\operatorname{tang}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tang} \alpha \pm \operatorname{tang} \beta}{1 \mp \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta};$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta);$$

$$\tang\alpha \pm \tang\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta;$$

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} = \frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)},$$

$$1+\sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\tang 2\alpha = \frac{2\tang\alpha}{1-\tang^2\alpha},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\cos\alpha = \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\tang\alpha = \frac{2\tang\frac{1}{2}\alpha}{1-\tang^2\frac{1}{2}\alpha},$$

$$\cot\alpha = \frac{\cot^2\frac{1}{2}\alpha - 1}{2\cot\frac{1}{2}\alpha};$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta);$$

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma=\pi,\\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma.\end{array}\right.$$

Résolution de l'équation du second degré :

$$x^2 + px + q = 0,$$

$$\frac{p^2}{4} - q > 0, \qquad q > 0, \qquad \frac{p}{2} = -\frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi};$$

$$x = \begin{cases} \sqrt{q}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi, \\ \sqrt{q}\cot\,\frac{1}{2}\varphi; \end{cases}$$

$$q < 0, \qquad \frac{p}{2} = -\frac{\sqrt{-q}}{\text{tang}\,\varphi};$$

$$x = \begin{cases} -\sqrt{-q}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi, \\ +\sqrt{-q}\cot\,\frac{1}{2}\varphi; \end{cases}$$

$$\frac{p^2}{4} - q < 0, \qquad q = \frac{p^2}{4}\frac{1}{\cos^2\varphi};$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}\,\text{tang}\,\varphi\sqrt{-1}.$$

Résolution de l'équation du troisième degré.

$$x^3 + px + q = 0,$$

$4p^3 + 27q^2 < 0$ racines réelles et inégales,

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3};$$

$$\begin{cases} x_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{1}{3}\varphi, \\ x_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(120^\circ + \frac{1}{3}\varphi), \\ x_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(240^\circ + \frac{1}{3}\varphi); \end{cases}$$

$4p^3 + 27q^2 > 0$; une racine réelle et deux racines imaginaires :

$$p < 0, \qquad \sin 2\psi = -\frac{2\sqrt{\frac{-p}{3}}}{q},$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\psi},$$

$$x_1 = \frac{2\sqrt{\frac{-p}{3}}}{\sin 2\varphi};$$

$$p > 0, \qquad \cot 2\psi = \frac{q}{2\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3},$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\psi},$$

$$x_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\varphi.$$

Formules relatives aux triangles.

$$\left\{\begin{array}{l} A + B + C = \pi, \\ \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}; \end{array}\right.$$

$$S = \tfrac{1}{2}\, ab \sin C.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a + b + c = 2p, \\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \end{array}\right.$$

R = rayon du cercle circonscrit,

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Différentielles usuelles.

$$d.ax = a\,dx,$$

$$d.x^m = m x^{m-1}\,dx,$$

$$d.xy = y\,dx + x\,dy,$$

$$d\frac{x}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},$$

$$d\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2};$$

$$d\log' x = \frac{dx}{x},$$

$$d\log x = \frac{dx}{x}\log e,$$

$$d.a^x = a^x \log' a\, dx = a^x \frac{\log a}{\log e}\, dx,$$

$$d.e^x = e^x\, dx;$$

$$d\sin x = \cos x\, dx,$$

$$d\cos x = -\sin x\, dx,$$

$$d\,\mathrm{tang}\, x = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

$$d\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x};$$

$$d\,\mathrm{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$d\,\mathrm{arc}\cos x = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$d\,\mathrm{arc}\,\mathrm{tang}\, x = \frac{dx}{1+x^2},$$

$$d\,\mathrm{arc}\cot x = \frac{-dx}{1+x^2};$$

$$d\log\sin x = \cot x\, dx,$$

$$d\log\cos x = -\mathrm{tang}\, x\, dx,$$

$$d\log\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}x = \frac{dx}{\sin x};$$

Intégrales usuelles.

$$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{const.},$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log' x = \frac{\log x}{\log e},$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log' a} = a^x \frac{\log e}{\log a},$$

$$\int e^x\, dx = e^x,$$

$$\int e^x x\, dx = x e^x - e^x;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\,x, \qquad \int \frac{-dx}{1+x^2} = \text{arc cot}\,x.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \log'(x+\sqrt{a+x^2}),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}\,x \quad \text{ou} \quad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc cos}\,x,$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log'\frac{a+x}{a-x},$$

$$\int dx\sqrt{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\left[\log'(x+\sqrt{1+x^2})+x\sqrt{1+x^2}\right],$$

$$\int dx\sqrt{1-x^2} = \tfrac{1}{2}(\text{arc sin}\,x + x\sqrt{1-x^2}),$$

$$\int \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc sin}\,\frac{1}{x},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \log'\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\right),$$

$$\int \log x\,dx = x\log x - x\log e;$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + \text{const.},$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x,$$

$$\int \text{tang}\,x\,dx = -\log'\cos x,$$

$$\int \cot x\,dx = \log'\sin x,$$

$$\int \sin x\cos x\,dx = \tfrac{1}{2}\sin^2 x;$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log'\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\log'\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \log'\,\text{tang}\,x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tang x + \text{const.},$$

$$\int \sin^2 x\, dx = \tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{4} \sin 2x,$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \tfrac{1}{2} x - \tfrac{1}{4} \sin 2x,$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \tang x - x;$$

$$\int \text{arc} \sin x\, dx = x \;\text{arc} \sin x + \sqrt{1 - x^2},$$

$$\int \text{arc} \tang x\, dx = x \,\text{arc} \tang x - \tfrac{1}{2} \log'(1 + x^2).$$

Intégrales définies.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a},$$

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^3 - x^2}} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int_0^\infty \cos^2 x\, dx = \int_0^\infty \sin^2 x\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Intégrales générales des équations différentielles.

$$\frac{dy}{y} = m\, dx, \qquad y = A e^{mx},$$

$$\frac{dz}{dx} = a \frac{dz}{dy}, \qquad z = \varphi(y + ax),$$

$$x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = z, \qquad \frac{x}{z} = \varphi\left(\frac{y}{z}\right),$$

$$y \frac{dz}{dx} = x \frac{dz}{dy}, \qquad z = \varphi(x^2 + y^2),$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 y, \qquad y = M e^{ax} + N e^{-ax},$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = a^2 \frac{d^2 z}{dy^2} \qquad z = \varphi(y - ax) + \psi(y + ax).$$

TABLES NUMÉRIQUES.

TABLES NUMÉRIQUES.

NOMBRES USUELS :

LEURS MULTIPLES ET SOUS-MULTIPLES.

CALCULS FAITS.

Nombres usuels et leurs logarithmes.

	Nombres.	Logarithmes.
π	3,14159	0,49715
$\frac{1}{\pi}$	0,31831	$\bar{1}$,50285
2π	6,28319	0,79818
$\frac{1}{2\pi}$	0,15915	$\bar{1}$,20182
$\frac{\pi}{2}$	1,57079	0,19612
$\frac{\pi}{4}$	0,78540	$\bar{1}$,89509
$\frac{4\pi}{3}$	4,18879	0,62209
$\frac{\pi}{360}$	0,00873	$\bar{3}$,94085
$\frac{\pi}{180}$	0,01745	$\bar{2}$,24180
π^2	9,86960	0,99430
$\frac{1}{\pi^2}$	0,10132	$\bar{1}$,00570
$\sqrt{\pi}$	1,77245	0,24857
$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$	0,56419	$\bar{1}$,75143
H	760	2,88081
$\frac{1}{H}$	$\frac{1}{760}$	$\bar{3}$,12057

	Nombres.	Logarithmes.
α	0,003665	$\bar{3}$,56407
$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{0,003665}$	2,43592
$d(\mathrm{H}_g)$	13,596	1,13341
P_{atm}	10333,3	4,01424
e	2,71828	0,43429
g	980,94	2,99164
$\frac{1}{g}$	0,00102	$\bar{3}$,00860
J	425	2,62839
$\frac{1}{\mathrm{J}} = \mathrm{A}$	0,00235	$\bar{3}$,37107
M = log vulg. e	0,43429	$\bar{1}$,63778
$\frac{1}{\mathrm{M}}$ = log nat. 10	2,30259	0,36222

Fonctions circulaires.

	Logarithmes.
$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,70711$	$\bar{1}$,84949
$\tan 45 = \cot 45 = 1$	
$\sin 30 = \cos 60 = \frac{1}{2} = 0,5$	$\bar{1}$,69897
$\cos 30 = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,886$	$\bar{1}$,93753
$\tan 30 = \cot 60 = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,57735$	$\bar{1}$,76144

Logarithmes décimaux (log) *et népériens* (log′) *des nombres entiers de* 0 *à* 25.

Nombres.	Logarithmes décimaux.	Logarithmes népériens.	Nombres.	Logarithmes décimaux.	Logarithmes népériens
1	0,00000	0,00000	14	1,14613	2,63905
2	0,30103	0,69314	15	1,17609	2,70805
3	0,47712	1,09861	16	1,20412	2,77258
4	0,60206	1,38629	17	1,23045	2,83321
5	0,69897	1,60943	18	1,25527	2,89037
6	0,77815	1,79175	19	1,27875	2,94413
7	0,84510	1,94591	20	1,30103	2,99573
8	0,90309	2,07944	21	1,32222	3,04452
9	0,95424	2,19722	22	1,34242	3,09104
10	1,00000	2,30258	23	1,36173	3,13549
11	1,04139	2,39789	24	1,38021	3,17805
12	1,07918	2,48490	25	1,39794	3,21887
13	1,11394	2,56494			

Valeurs de $\frac{h}{760}$.

h.	$\frac{h}{760}$.	h.	$\frac{h}{760}$.	h.	$\frac{h}{760}$.	h.	$\frac{h}{760}$.
700...	0,9211	720,5.	0,9480	741...	0,9750	761,5.	1,0020
700,5.	0,9217	721...	0,9487	741,5.	0,9757	762...	1,0026
701...	0,9224	721,5.	0,9493	742...	0,9763	762,5.	1,0033
701,5.	0,9230	722...	0,9500	742,5.	0,9770	763...	1,0039
702...	0,9237	722,5.	0,9507	743...	0,9776	763,5.	1,0046
702,5.	0,9243	723...	0,9513	743,5.	0,9783	764...	1,0053
703...	0,9250	723,5.	0,9520	744...	0,9789	764,5.	1,0059
703,5.	0,9257	724...	0,9526	744,5.	0,9796	765...	1,0066
704...	0,9263	724,5.	0,9533	745...	0,9803	765,5.	1,0072
704,5.	0,9270	725...	0,9539	745,5.	0,9809	766...	1,0079
705...	0,9276	725,5.	0,9546	746...	0,9816	766,5.	1,0086
705,5.	0,9283	726...	0,9553	746,5.	0,9822	767...	1,0092
706...	0,9289	726,5.	0,9559	747...	0,9829	767,5.	1,0099
706.5.	0,9296	727...	0,9566	747,5.	0,9836	768...	1,0105
707...	0,9303	727,5.	0,9572	748...	0,9842	768,5.	1,0112
707,5.	0,9309	728...	0,9579	748,5.	0,9849	769...	1,0118
708...	0,9316	728,5.	0,9586	749...	0,9855	769,5.	1,0125
708,5.	0,9322	729...	0,9592	749,5.	0,9862	770...	1,0132
709...	0,9329	729,5.	0,9599	750...	0,9868	770,5.	1,0138
709,5.	0,9336	730...	0,9605	750,5.	0,9875	771...	1,0145
710...	0,9342	730,5.	0,9612	751...	0,9882	771,5.	1,0151
710,5.	0,9349	731...	0,9618	751,5.	0,9888	772...	1,0158
711...	0,9355	731,5.	0,9625	752...	0,9895	772,5.	1,0164
711,5.	0,9362	732...	0,9632	752,5.	0,9901	773...	1,0171
712...	0,9368	732,5.	0,9638	753...	0,9908	773,5.	1,0178
712,5.	0,9375	733...	0,9645	753,5.	0,9914	774...	1,0184
713...	0,9382	733,5.	0,9651	754...	0,9921	774,5.	1,0191
713,5.	0,9388	734...	0,9658	754,5.	0,9928	775...	1,0197
714...	0,9395	734,5.	0.9664	755...	0,9934	775,5.	1,0204
714,5.	0,9401	735...	0,9671	755,5.	0,9941	776 ..	1,0211
715. .	0,9408	735,5.	0,9677	756...	0,9947	776,5.	1,0217
715,5.	0,9414	736...	0,9684	756,5.	0,9954	777...	1,0224
716...	0,9421	736,5.	0,9691	757...	0,9961	777,5.	1,0230
716,5.	0,9428	737...	0,9697	757,5.	0,9967	778...	1,0237
717...	0,9434	737,5.	0,9704	758...	0,9974	778,5.	1,0243
717,5.	0,9441	738...	0,9710	758,5	0,9980	779...	1,0250
718...	0,9447	738,5.	0,9717	759...	0,9987	779,5.	1,0257
718,5,	0,9454	739 ..	0,9724	759,5.	0,9993	780...	1,0263
719...	0,9461	739,5.	0,9730	760...	1,0000		
719.5.	0,9467	740...	0,9737	760,5.	1,0007		
720. .	0,9474	740,5.	0,9743	761...	1,0013		

Valeurs de $1 + \alpha t$ *de* 0° *à* 100°
($\alpha = 0,003665$).

t.	$1+\alpha t$.	*t.*	$1+\alpha t$.	*t.*	$1+\alpha t$.
0........	1,0000	19........	1,0696	38........	1,1393
0,5......	1,0018	19,5......	1,0715	38,5......	1,1411
1........	1,0037	20........	1,0733	39..	1,1429
1,5......	1,0055	20,5......	1,0751	39,5......	1,1448
2........	1,0073	21........	1,0770	40........	1,1466
2,5......	1,0092	21,5......	1,0788	40,5......	1,1484
3........	1,0110	22........	1,0806	41........	1,1503
3,5......	1,0128	22,5......	1,0825	41,5.... .	1,1521
4........	1,0147	23........	1,0843	42........	1,1539
4,5......	1.0165	23,5......	1,0861	42,5......	1,1558
5........	1,0183	24........	1.0880	43,.......	1,1576
5,5......	1,0202	24.5......	1,0898	43,5......	1,1594
6........	1,0220	25........	1,0916	44........	1,1613
6,5......	1,0238	25,5......	1,0935	44,5......	1,1631
7........	1,0257	26........	1,0953	45........	1,1649
7,5......	1,0275	26,5......	1,0971	45,5......	1,1668
8........	1,0293	27........	1,0990	46........	1,1686
8,5......	1,0312	27,5......	1,1008	46,5......	1,1704
9........	1,0330	28........	1,1026	47...... ..	1,1723
9,5......	1,0348	28,5......	1,1045	47,5......	1,1741
10........	1,0366	29........	1,1063	48........	1,1759
10,5......	1,0385	29,5......	1,1081	48.5......	1,1778
11........	1,0403	30........	1,1099	49........	1,1796
11,5......	1,0421	30,5......	1,1118	49,5.....,	1,1814
12........	1,0440	31........	1,1136	50........	1,1832
12,5......	1,0458	31,5......	1,1154	50,5......	1,1851
13........	1,0476	32........	1,1173	51........	1,1869
13,5......	1,0495	32,5......	1,1191	51,5......	1,1887
14........	1,0513	33........	1,1209	52........	1,1906
14,5......	1,0531	33,5......	1,1228	52,5......	1,1924
15........	1,0550	34........	1,1246	53........	1,1942
15,5......	1,0568	34,5......	1,1264	53,5......	1,1961
16........	1,0586	35........	1,1283	54........	1,1979
16,5......	1,0605	35,5......	1,1301	54,5......	1,1997
17........	1,0623	36........	1,1319	55........	1,2016
17,5	1,0641	36,5......	1,1338	55,5......	1,2034
18.... ...	1,0660	37........	1,1356	56........	1,2052
18,5......	1,0678	37,5......	1,1374	56,5......	1,2071

Valeurs de $1 + \alpha t$ *de* 0° *à* 100°
($\alpha = 0,003665$) [suite].

t.	$1 + \alpha t$.	t.	$1 + \alpha t$.	t.	$1 + \alpha t$.
57	1,2089	75	1,2749	93	1,3408
57,5	1,2107	75,5	1,2767	93,5	1,3427
58	1,2126	76	1,2785	94	1,3445
58,5	1,2144	76,5	1,2804	94,5	1,3463
59	1,2162	77	1,2822	95	1,3482
59,5	1,2181	77,5	1,2840	95,5	1,3500
60	1,2199	78	1,2859	96	1,3518
60,5	1,2217	78,5	1,2877	96,5	1,3537
61	1,2236	79	1,2895	97	1,3555
61,5	1,2254	79,5	1,2914	97,5	1,3573
62	1,2272	80	1,2932	98	1,3592
62,5	1.2291	80,5	1,2950	98,5	1,3610
63	1,2309	81	1,2969	99	1,3628
63,5	1,2327	81,5	1,2987	99,5	1,3647
64	1,2346	82	1,3005	100	1,3665
64,5	1,2364	82,5	1,3024		
65	1,2382	83	1,3042		
65,5	1,2401	83,5	1,3060		
66	1,2419	84	1,3079		
66,5	1,2437	84,5	1,3097		
67	1,2456	85	1,3115		
67,5	1,2474	85,5	1,3134		
68	1,2492	86	1,3152		
68,5	1,2511	86,5	1,3170		
69	1.2529	87	1,3189		
69,5	1,2547	87,5	1,3207		
70	1.2565	88	1,3225		
70,5	1,2584	88,5	1,3244		
71	1,2602	89	1,3262		
71,5	1,2620	89,5	1,3280		
72	1,2639	90	1,3298		
72,5	1,2657	90,5	1,3317		
73	1,2675	91	1,3335		
73,5	1,2694	91,5	1,3353		
74	1,2712	92	1,3372		
74,5	1,2730	92,5	1,3390		

PARTIES proportionnelles.

0,1	0,0004
0,2	0,0007
0,3	0,0011
0,4	0,0015
0,5	0,0018
0,6	0,0022
0,7	0,0026
0,8	0,0029
0,9	0,0033

Valeurs de $\frac{1}{1+\alpha t}$ *de* 0° *à* 100°

($\alpha = 0,003665$).

t.	$\frac{1}{1+\alpha t}$.	t.	$\frac{1}{1+\alpha t}$.	t.	$\frac{1}{1+\alpha t}$.
0........	1,0000	18........	0,9381	36........	0,8835
0,5......	0,9982	18,5......	0,9365	36,5......	0,8820
1........	0,9963	19........	0,9348	37........	0,8806
1,5......	0,9945	19,5......	0,9333	37,5......	0,8792
2........	0,9928	20........	0,9316	38........	0,8777
2,5......	0,9909	20,5......	0,9301	38,5......	0,8763
3........	0,9891	21........	0,9285	39........	0,8750
3,5......	0,9874	21,5......	0,9270	39,5......	0,8735
4........	0,9855	22........	0,9253	40........	0,8721
4,5......	0,9838	22,5......	0,9238	40,5......	0,8708
5........	0,9820	23........	0,9222	41........	0,8693
5,5......	0,9802	23,5......	0,9207	41,5......	0,8680
6........	0,9785	24........	0,9191	42........	0,8666
6,5......	0,9768	24,5......	0,9176	42,5......	0,8652
7........	0,9749	25........	0,9160	43........	0,8639
7,5......	0,9732	25,5......	0,9145	43,5......	0,8625
8........	0,9715	26........	0,9129	44........	0,8611
8,5......	0,9697	26,5......	0,9115	44,5......	0,8598
9........	0,9681	27........	0,9099	45........	0,8584
9,5......	0,9664	27,5......	0,9084	45,5......	0,8570
10........	0,9646	28........	0,9068	46........	0,8557
10,5......	0,9629	28,5......	0,9054	46,5......	0,8544
11........	0,9612	29........	0,9038	47........	0,8530
11,5......	0,9596	29,5......	0,9024	47,5......	0,8517
12........	0,9578	30........	0,9008	48........	0,8504
12,5......	0,9562	30,5......	0,8994	48,5......	0,8490
13........	0,9545	31........	0,8980	49........	0,8477
13,5......	0,9528	31,5......	0,8965	49,5......	0,8464
14........	0,9511	32........	0,8950	50........	0,8452
14,5......	0,9496	32,5......	0,8936	50,5......	0,8438
15........	0,9478	33........	0,8921	51........	0,8425
15,5......	0,9463	33,5......	0,8906	51,5......	0,8413
16........	0,9445	34........	0,8892	52........	0,8399
16,5......	0,9430	34,5......	0,8878	52,5......	0,8386
17........	0,9413	35........	0,8863	53........	0,8374
17,5......	0,9398	35,5......	0,8849	53,5......	0,8361

Valeurs de $\frac{1}{1+\alpha t}$ *de* 0° *à* 100°

(α = 0,003665) [suite].

t.	$\frac{1}{1+\alpha t}$.	t.	$\frac{1}{1+\alpha t}$.	t.	$\frac{1}{1+\alpha t}$.
54........	0,8348	69,5......	0,7970	85........	0,7625
54,5......	0,8335	70........	0,7959	85,5......	0,7614
55........	0,8322	70,5......	0,7947	86........	0,7603
55,5......	0,8310	71........	0,7935	86,5......	0,7593
56........	0,8297	71,5......	0,7924	87........	0,7583
56,5......	0,8284	72........	0,7912	87,5......	0,7572
57........	0,8272	72,5......	0,7901	88........	0,7561
57,5......	0,8260	73........	0,7890	88,5......	0,7551
58........	0,8247	73,5......	0,7878	89........	0,7540
58,5......	0,8235	74........	0,7867	89,5......	0,7530
59........	0,8222	74,5......	0,7855	90........	0,7520
59,5......	0,8210	75........	0,7843	90,5......	0,7509
60........	0,8197	75,5......	0,7833	91........	0,7499
60,5......	0,8185	76........	0,7822	91,5......	0,7489
61........	0,8173	76,5......	0,7810	92........	0,7478
61,5......	0,8161	77........	0,7799	92,5......	0,7468
62........	0,8149	77,5......	0,7788	93........	0,7458
62,5......	0,8136	78........	0,7777	93,5......	0,7448
63........	0,8124	78,5......	0,7766	94........	0,7438
63,5......	0,8112	79........	0,7755	94,5......	0,7428
64........	0,8100	79,5......	0,7744	95........	0,7417
64,5......	0,8088	80........	0,7733	95,5......	0,7407
65........	0,8076	80,5......	0,7722	96........	0,7397
65,5......	0,8064	81........	0,7711	96,5......	0,7387
66........	0,8052	81,5......	0,7700	97........	0,7377
66,5......	0,8041	82........	0,7689	97,5......	0,7368
67........	0,8028	82,5......	0,7678	98........	0,7357
67,5......	0,8017	83........	0,7668	98,5......	0,7348
68........	0,8005	83,5......	0,7657	99........	0,7338
68,5......	0,7993	84........	0,7646	98,5......	0,7328
69........	0,7981	84,5......	0,7635	100........	0,7318

Table des NOMBRES, *de leurs* RÉCIPROQUES, *des* RACINES CARRÉES, *des* CARRÉS *et des* CUBES; *des* CIRCONFÉRENCES *et des* CERCLES, *ayant ces nombres pour* DIAMÈTRES.

NOMBRES n.	INVERSES $\frac{1}{n}$.	$\sqrt{n}$.	CARRÉS n^2.	CUBES n^3.	CIRCONFÉRENCES $\pi D = \pi n$.	CERCLES $\frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi n^2}{4}$
1.....	1,0000	1,000	1	1	3,142	0,78
1,5...	0,6666	1,225	2,25	3,375	4,712	1,77
2.....	0,5000	1,414	4	8	6,283	3,14
2,5...	0,4000	1,581	6,25	15,625	7,854	4,91
3.....	0,3333	1,732	9	27	9,424	7,07
3,5...	0,2858	1,871	12,25	42,875	10,995	9,62
4.....	0,2500	2,000	16	64	12,566	12,57
4,5...	0,2246	2,121	20,25	91,125	14,137	15,90
5.....	0,2000	2,336	25	125	15,708	19,64
5,5...	0,1819	2,345	30,25	166,375	17,278	23,76
6.....	0,1667	2,449	36	216	18,849	28,27
6,5...	0,1539	2,550	42,25	274,625	20,420	33,18
7.....	0,1429	2,635	49	343	21,991	38,48
7,5...	0,1333	2,739	56,25	421,875	23,561	44,18
8.....	0,1250	2,828	64	512	25,132	50,26
8,5...	0,1176	2,916	72,25	614,125	26,703	56,75
9.....	0,1111	3,000	81	729	28,274	63,61
9,5...	0,1053	3,082	90,25	857,375	29,845	70,88
10.....	0,1000	3,162	100	1000	31,415	78,54
10,5...	0,0952	3,240	110,25	1157,625	32,986	86,59
11.....	0,0909	3,316	121	1331	34,557	95,03
11,5...	0,0869	3,391	132,25	1520,875	36,128	103,86
12.....	0,0833	3,464	144	1728	37,699	113,10
12,5...	0,0800	3,535	156,25	1953,125	39,270	122,71
13.....	0,0769	3,605	169	2197	40,841	132,73
13,5...	0,0741	3,674	182,25	2460,375	42,411	143,13
14.....	0,0714	3,741	196	2744	43,982	153,93
14,5...	0,0690	3,808	210,25	3048,625	45,553	165,13
15.....	0,0667	3,872	225	3375	47,124	176,71
15,5...	0,0645	3,937	240,25	3723,875	48,694	188,69
16.....	0,0625	4,000	256	4096	50,265	201,06
16,5...	0,0606	4,062	272,25	4492,125	51,836	213,82
17.....	0,0588	4,123	289	4913	53,407	226,98
17,5...	0,0571	4,183	306,25	5359,375	54,978	240,52
18.....	0,0556	4,242	324	5832	56,548	254,46
18,5...	0,0541	4,301	342,25	6331,225	58,119	268,80
19.....	0,0526	4,358	361	6859	59,690	283,52

NOMBRES n.	INVERSES $\frac{1}{n}$.	$\sqrt{n}$.	CARRÉS n^2.	CUBES n^3.	CIRCONFÉRENCES $\pi D = \pi n$.	CERCLES $\frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi n^2}{4}$
19,5...	0,0513	4,416	380,25	7414,875	61,261	298,64
20.....	0,0500	4,472	400	8000	62,832	314,15
20,5...	0,0488	4,527	420,25	8615,125	64,402	330,06
21.....	0,0476	4,582	441	9261	65,973	346,36
21,5...	0,0465	4,636	462,25	9938,375	67,544	363,05
22.....	0,0455	4,690	484	10648	69,115	380,13
22,5...	0,0444	4,743	506,25	11390,625	70,686	397,60
23.....	0,0435	4,795	529	12167	72,256	415,47
23,5...	0,0425	4,848	552,25	12977,825	73,827	433,73
24.....	0,0417	4,898	576	13824	75,398	452,38
24,5...	0,0408	4,949	600,25	14706,125	76,969	471,43
25.....	0,0400	5,000	625	15625	78,540	490,87
25,5...	0,0392	5,049	650,25	16581,375	80,110	510,70
26.....	0,0385	5,099	676	17576	81,681	530,93
26,5...	0,0377	5,148	702,25	18609,625	83,252	551,54
27.....	0,0370	5,196	729	19683	84,823	572,55
27,5...	0,0364	5,244	756,25	20796,875	86,394	593,95
28.....	0,0357	5,291	784	21952	87,964	615,75
28,5...	0,0351	5,338	812,25	23149,125	89,535	637,94
29.....	0,0345	5,381	841	24389	91,106	660,52
29,5...	0,0339	5,432	870,25	25672,375	92,677	683,49
30.....	0,0333	5,477	900	27000	94,248	706,85
30,5...	0,0328	5,522	930,25	28372,625	95,818	730,61
31.....	0,0323	5,567	961	29791	97,389	754,76
31,5...	0,0317	5,612	992,25	31255,875	98,960	779,31
32.....	0,0313	5,656	1024	32798	100,531	804,24
32,5...	0,0308	5,701	1056,25	34328,125	102,102	829,57
33.....	0,0303	5,744	1089	35937	103,672	855,29
33,5...	0,0299	5,787	1122,25	37595,375	105,243	881,41
34.....	0,0294	5,830	1156	39304	106,814	907,92
34,5...	0,0290	5,873	1190,25	41063,625	108,385	934,82
35.....	0,0286	5,916	1225	42875	109,956	962,11
35,5...	0,0282	5,958	1260,25	44738,875	111,526	989,80
36.....	0,0278	6,000	1296	46656	113,097	1017,87
36,5...	0,0274	6,041	1332,25	48627,125	114,668	1046,34
37.....	0,0270	6,082	1369	50653	116,239	1075,21
37,5...	0,0267	6,124	1406,25	52734,375	117,810	1104,46
38.....	0,0263	6,164	1444	54872	119,380	1134,11
38,5...	0,0260	6,204	1482,25	57066,625	120,961	1164,15
39.....	0,0256	6,244	1521	59319,	122,522	1194,59
39,5...	0,0253	6,285	1560,25	61629,875	124,093	1225,42

NOMBRES n.	INVERSES $\frac{1}{n}$.	$\sqrt{n}$.	CARRÉS n^2.	CUBES n^3.	CIRCONFÉRENCES $\pi D = \pi n$.	CERCLES $\frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi n^2}{4}$
40.....	0,0250	6,324	1600	64000	125,664	1256,63
40,5...	0,0247	6,364	1640,25	66430,125	127,234	1288,25
41.....	0,0244	6,403	1681	68921	128,805	1320,25
41,5...	0,0241	6,442	1722,25	71473,375	130,476	1352,65
42.....	0,0238	6,480	1764	74088	131,947	1385,44
42,5...	0,0235	6,519	1806,25	76765,625	133,518	1418,62
43.....	0,0233	6,557	1849	79507	135,088	1452,20
43,5...	0,0230	6,595	1892,25	82312,875	136,659	1486,17
44.....	0,0227	6,633	1936	85184	138,230	1520,52
44,5...	0,0225	6,671	1980,25	88121,125	139,801	1555,28
45.....	0,0222	6,708	2025	91125	141,372	1590,43
45,5...	0,0220	6,745	2070,25	94196,375	142,942	1625,97
46.....	0,0217	6,782	2116	97336	144,513	1661,90
46,5...	0,0215	6,820	2162,25	100544,625	146,084	1698,23
47.....	0,0213	6,855	2209	103823	147,655	1734,94
47,5..	0.0211	6,892	2256,25	107171,875	149,226	1772,05
48.....	0,0208	6,928	2304	110592	150,796	1809,55
48,5...	0,0206	6,964	2352,25	114084,125	152.367	1847,45
49.....	0,0204	7,000	2401	117649	153,938	1885,74
49,5...	0,0202	7,036	2450,25	121287,375	155,509	1924,42
50.....	0,0200	7,071	2500	125000	157,080	1963,49
50,5 ..	0,0198	7,106	2550,25	128787,625	158,650	2002,96
51.....	0,0196	7,141	2601	132651	160,221	2042,82
51,5...	0.0194	7,176	2652,25	136590,875	161,792	2083,07
52.....	0.0192	7,211	2704	140608	163,363	2123,71
52,5...	0,0190	7,245	2756,25	144703,125	164,934	2164,75
53.....	0,0189	7,280	2809	148877	166,504	2206,18
53,5...	010187	7,314	2862,25	153130,375	168,075	2248,01
54.....	0,0185	7,348	2916	157464	169,646	2290,21
54,5...	0,0183	7,382	2970,25	161878,625	171,217	2332,83
55.....	0.0182	7,416	3025	166375	172,788	2375,82
55,5...	0,0180	7,450	3080,25	170953,875	174,358	2419,22
56.....	0,0179	7,483	3136	175616	175,929	2463,01
56,5...	0,0177	7,517	3192,25	180362,125	177,500	2507,19
57.....	0,0175	7,549	3249	185193	179,071	2551,75
57,5...	0,0174	7,583	3306,25	190109,375	180,642	2596,72
58.....	0,0172	7,615	3364	195112	182,212	2642,08
58,5...	0,0171	7,648	3422,25	200201,625	183,783	2687,83
59. ...	0,0169	7,681	3481	205379	185,354	2733,97
59,5...	0,0168	7,713	3540,25	210644,875	186,925	2780,51
60.....	0,0167	7,745	3600	216000	188,496	2827,43

NOMBRES n.	INVERSES $\frac{1}{n}$.	$\sqrt{n}$.	CARRÉS n^2.	CUBES n^3.	CIRCONFÉRENCES $\pi D = \pi n$.	CERCLES $\frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi n^2}{4}$
60,5,..	0,0165	7.778	3660,25	221445,125	190,066	2874,76
61.....	0,0164	7,810	3721	226981	191,637	2922,46
61,5...	0,0163	7,842	3782,25	232608,375	193,208	2970,57
62.....	0,0161	7,874	3844	238328	194,779	3019,07
62,5...	0,0160	7,905	3096,25	244140,625	196,350	3067,96
63.....	0,0159	7,937	3969	250047	197,920	3117,24
63,5...	0,0157	7,968	4032,25	256047,875	199,491	3166,92
64.....	0,0156	8,000	4096	262144	201,062	3216,99
64,5...	0,0155	8,031	4160,25	268336,125	202,633	3267,46
65.....	0,0154	8,062	4225	274625	204,204	3318,30
65,5...	0,0153	8,093	4290,25	281011,375	205,774	3369,56
66.....	0,0152	8,124	4356	287496	207,345	3421,18
66,5...	0,0150	8,154	4422,25	294079,625	208,916	3473,23
67.....	0,0149	8,185	4489	300763	210.487	3525,65
67,5...	0,0148	8,215	4556,25	307546,875	212,058	3578,47
68.....	0,0147	8,246	4624	314432	213,628	3631,68
68,5...	0,0146	8,276	4692,25	321419,125	215,199	3685,29
69.....	0,0145	8,306	4761	328509	216.770	3739,28
69,5...	0,0144	8.327	4830,25	335702,375	218.341	3793,67
70.....	0,0143	8,366	4900	343000	219 912	3848,45
70,5...	0,0142	8,396	4970,25	350402,625	221,482	3903,63
71... .	0,0141	8,426	5041	357911	223,053	3959,19
71,5...	0,0140	8,456	5112,25	365525,875	224,624	4015,16
72.....	0,0139	8,485	5184	373248	226,195	4071,50
72,5...	0,0138	8,515	5256,25	381078,125	227,766	4128,25
73.....	0,0137	8,544	5329	389017	229,336	4185,38
73,5 ..	0,0136	8,573	5402,25	397065,375	230,907	4242,92
74.....	0,0135	8,602	5476	405224	232,478	4300,84
74,5...	0,0134	8,631	5550,25	413493,625	234,049	4359,16
75.....	0,0133	8,660	5625	421875	235,620	4417,86
75,5...	0,0132	8,689	5700,25	430368,875	237,190	4476,97
76.....	0,0132	8.717	5776	438976	238,761	4536,45
76,5...	0,0131	8,746	5852,25	447697,125	240,332	4596,35
77.....	0.0130	8,774	5929	456533	241,903	4656,62
77.5...	0,0129	8,803	6006,25	465484,375	243,774	4717,30
78.....	0,0128	8,831	6084	474552	245,044	4778,36
78,5...	0,0127	8,860	6162,25	483736,625	246,615	4839,83
79.....	0,0127	8,888	6241	493039	248,186	4901,66
79,5...	0,0126	8,916	6320,25	502459,875	249,757	4963,92
80.....	0,0125	8,944	6400	512000	251,328	5026,54
80,5...	0,0124	8,972	6480,25	521660,125	252,898	5089,58

NOMBRES n.	INVERSES $\frac{1}{n}$.	$\sqrt{n}$.	CARRÉS n^2,	CUBES n^3.	CIRCONFÉRENCES $\pi D = \pi n$.	CERCLES $\frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi n^2}{4}$
81.....	0,0123	9,000	6561	531441	254,469	5153
81,5...	0,0123	9,027	6642,25	441343,375	256,040	5216,82
82.....	0,0122	9,055	6724	551368	257,611	5281,01
82,5...	0,0121	9,083	6806,25	561515,625	239,182	5345,62
83.....	0,0120	9,110	6889	571787	260,752	5410,59
83,5...	0,0120	9,138	6972,25	582182,875	262,323	5476,00
84.....	0,0119	9,165	7056	592704	263,894	5541,77
84,5...	0,0118	9,192	7140,25	603351,125	265,465	5607,95
85.....	0,0118	9,219	7225	614125	267,036	5674,50
85,5...	0,0117	9,246	7310,25	625026,375	268,606	5741,47
86.....	0,0116	9,273	7396	636056	270,177	5808,80
86,5...	0,0116	9,300	7482,25	647214,625	271,748	5876,55
87.....	0,0115	9,327	7569	658503	273,319	5944,67
87,5...	0,0114	9,354	7656,25	669921,875	274,890	6013,21
88.....	0,0114	9,386	7744	681472	276,460	6082,11
88,5...	0,0113	9,407	7832,25	693154,125	278,031	6151,44
89.....	0,0112	9,433	7921	704969	279,602	6221,13
89,5...	0,0112	9,460	8010,25	716917,373	281,173	6291,24
90.....	0,0111	9,486	8100	729000	282,744	6361,72
90,5...	0,0110	9,513	8190,25	741217,625	284,314	6432,62
91.....	0,0110	9,539	8281	753571	285,885	6503,87
91,5...	0,0109	9,565	8372,25	766060,875	287,456	6575,56
92.....	0,0109	9,591	8464	778688	289,027	6647,61
92,5...	0,0108	9,617	8556,25	791453,125	290,598	6720,07
93	0,0108	9,643	8649	804357	292,168	6792,90
93,5...	0,0107	9,669	8742,25	817400,375	293,739	6866,16
94.....	0,0106	9,695	8836	830584	295,310	6939,78
94,5...	0,0106	9,721	8930,25	843908,625	296,881	7013,81
95.....	0,0105	9,746	9025	857375	298,452	7088,21
95,5...	0,0105	9,772	9130,25	870983,875	300,022	7163,04
96.....	0,0104	9,797	9216	884736	301,593	7238,23
96,5...	0,0104	9,823	9312,25	898632,125	303,164	7313,84
97.....	0,0103	9,848	9409	912673	304,735	7389,81
97,5...	0,0103	9,874	9506,25	926859,375	306,306	7466,20
98.....	0,0102	9,899	9604	941192	307,876	7542,96
98,5...	0,0102	9,924	9702,25	955671,625	309,447	7620,14
99.....	0,0101	9,949	9801	970299	311,018	7697,68
99,5...	0,0101	9,975	9900,25	985074,875	312,589	7775,65
100.....	0,0100	10,000	10000	1000000	314,159	7853,97

FIN.



